Geometria, 08.04.2026

4.1. Dwusieczne kątów BAC i ABC trójkąta ABC przecinają przeciwległe boki tego trójkąta odpowiednio w punktach D i E. Wiedząc, że $AE + BC = AB$, wyznacz miarę kąta ACB.

4.2. Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym, a A', B', C' będą spodkami wysokości opuszczonych odpowiednio z wierzchołków A, B, C. Udowodnij, że trójkąt $A'B'C'$ ma najmniejszy obwód spośród trójkątów mających po 1 wierzchołku na bokach BC, CA, AB.

4.3. Udowodnij, że proste przechodzące przez środki boków czworokąta wpisanego w okąg i prostopadłe do przeciwległych boków przecinają się w jednym punkcie.

4.4. Udowodnij, że w trójkącie o kątach α, β, γ, polu S i promieniu okręgu opisanego R zachodzi

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \frac{4S}{a^2 + b^2 + c^2 - 8R^2}.$$

4.5. Dany jest romb $ABCD$, w którym $|\measuredangle BAD| > 60^\circ$. Punkty E, F leżą odpowiednio na bokach AB, AD, przy czym $|\measuredangle ECF| = |\measuredangle ABD|$. Proste CE i CF przecinają przekątną BD odpowiednio w punktach P, Q. Udowodnij, że $|PQ| : |EF| = |AB| : |BD|$.

4.6. Udowodnij, że okrąg Feuerbacha jest styczny do okręgu wpisanego w trójkąt.

4.7. Udowodnij, że jeśli czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, to środki ciężkości trójkątów ABC, BCD, CDA, DAB leżą na jednym okręgu.

4.8. Udowodnij, że w trójkącie o długościach boków a, b, c, pomieniu okręgu wpisanego r oraz $p := \frac{a+b+c}{2}$,

$$\frac{1}{(p-a)^2} + \frac{1}{(p-b)^2} + \frac{1}{(p-c)^2} \geq \frac{1}{r^2}.$$

4.9. Oblicz iloczyn długości wszystkich boków i przekątnych n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu r.

4.10. Dane są równoległoboki $ABCD$ i $A'B'C'D'$ takie, że B' leży na AD oraz D' leży na AB. Udowodnij, że proste BB', CC', DD' przecinają się w jednym punkcie.

Backlog: 1.8 - 1.12, 2.9, 2.12 - 2.15, 3.12, 3.13

Zadania pochodzą z serii książek A. Neugebauera *Matematyka Olimpijska*, książki *Mathematical Circles* autorstwa D. Fomina, S. Genkina i I. Itenberga, broszury *Wokół obrotów* W. Pompego, forum artofproblemsolving.com oraz folkloru.