

Własność Darboux feat. zadania od CKE, 22.04.2026

Teoria.zip:

Definicja. Funkcja f ma własność Darboux, gdy dla każdych $u < v$ należących do jej zbioru wartości oraz $y \in (u, v)$, istnieje x takie, że $f(x) = y$. Innymi słowy, zbiór wartości f jest przedziałem (otwartym lub domkniętym, ograniczonym lub nie).

Twierdzenie. Każda funkcja ciągła $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $I \subseteq \mathbb{R}$ jest przedziałem, ma własność Darboux.

Uwaga. To samo dotyczy się funkcji których dziedziną jest spójny podzbiór \mathbb{R}^n . Dla naszych potrzeb wystarczy mocniejsze założenie - łukowa spójność. Zbiór $X \subseteq \mathbb{R}^n$ jest łukowo spójny, gdy dla każdych $p, q \in X$ istnieje taka funkcja ciągła $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$, że $\gamma(0) = p$ oraz $\gamma(1) = q$.

6.0. Udowodnij, że równanie $x = \cos x$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

6.1. Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x}}{5 + x^2} - 3^{-x-1}.$$

Udowodnij, że f ma co najmniej jedno miejsce zerowe w przedziale $(0, 3)$.

6.2. Funkcja $f : [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 1.$$

Znajdź zbiór wartości f .

6.3. Wykaż, że równanie $x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 8x - 2 = 0$ ma w przedziale $(-2, 2)$ co najmniej dwa różne rozwiązania.

6.4. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$.

6.5. Wyznacz liczbę rozwiązań równania

$$\log_2(x+1)^x = 3 + \frac{4}{3} \log_4(x+1)^3.$$

6.6. Dla jakich n istnieje ostrosłup prawidłowy n -kątny o polu podstawy równym polu ściany bocznej?

6.7. Udowodnij, że jeśli p jest wielomianem nieparzystego stopnia, to równanie $p(x) = 0$ ma przynajmniej jedno rozwiązanie w \mathbb{R} .

6.8. Udowodnij, że dla $a \leq b$, każda funkcja ciągła $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ ma punkt stały, tzn. istnieje takie c , że $f(c) = c$.

6.9. Udowodnij, że równanie $\operatorname{tg} x = x$ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

6.10. Udowodnij, że jeśli funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła oraz jest różniczkowalna na (a, b) , to funkcja f' ma na przedziale (a, b) własność Darboux.

6.11. Udowodnij, że dla $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ciągłej, równanie $f(x) = x$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy równanie $f(f(x)) = x$ ma rozwiązanie.

6.12. Funkcja f jest ciągła na przedziale $[1, 8]$ i spełnia warunek $f(8) - f(1) = 3$. Udowodnij, że istnieje takie x , że $f(2x) - f(x) = 1$.

6.13. Liczby a_1, \dots, a_{10} leżą w przedziale $[2018, 2020]$. Udowodnij, że istnieje takie $x \in \mathbb{R}$, że

$$\sum_{j=1}^{10} |x - a_j| = 10.$$

6.14. Niech funkcja f będzie taka, że jej wykres powstaje z obrotu wykresu funkcji \sin o 45° dookoła punktu $(0, 0)$ przeciwie do ruchu wskazówek zegara. Traktując ją jako daną, znajdź ogólny wzór na rozwiązanie równania $x - \sin x = a$ z niewiadomą x i parametrem a .

6.15. Niech P będzie wielokątem wypukłym na płaszczyźnie. Udowodnij, że istnieje na tej płaszczyźnie taki układ współrzędnych, że przecięcie każdej ćwiartki z P ma pole dokładnie $\frac{1}{4}|P|$.

6.16. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia równanie

$$f(x+1)f(x) + f(x+1) + 1 = 0$$

dla każdego x . Udowodnij, że f nie jest funkcją ciągłą.

6.17. Niech $u, v, w, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ będą dwoma liniowo niezależnymi układami wektorów w \mathbb{R}^3 (tzn. każdy składa się z wektorów nieleżących w jednej płaszczyźnie). Układ u, v, w jest dodatnio zorientowany (tzn. $\langle u \times v \mid w \rangle > 0$), a układ $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ jest ujemnie zorientowany (tzn. $\langle \tilde{u} \times \tilde{v} \mid \tilde{w} \rangle < 0$). Udowodnij, że nie istnieją takie funkcje ciągłe $f, g, h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, że $f(0) = u, g(0) = v, h(0) = w, f(1) = \tilde{u}, g(1) = \tilde{v}, h(1) = \tilde{w}$ oraz dla każdego $t \in [0, 1]$, układ $f(t), g(t), h(t)$ jest liniowo niezależny.

6.18. Udowodnij, że funkcja $[-1, \infty) \ni x \mapsto xe^x \in [-1/e, \infty)$ jest bijekcją. Funkcja W do niej odwrotna nazywa się *funkcją W Lamberta*. Wyraż w jej terminach rozwiązania równań $x^x = a, x^{\frac{1}{x}} = a, x - 2^{-x} = a$.

Twierdzenie. (Sturm) Niech p będzie wielomianem w współczynnikach rzeczywistych bez pierwiastków wielokrotnych. Zdefiniujmy rekurencyjnie ciąg wielomianów p_0, p_1, p_2, \dots tak, że $p_0 = p, p_1 = p'$, oraz $-p_{j+2}$ jest resztą z dzielenia p_j przez p_{j+1} . Dla $t \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, przez $V(t)$ oznaczmy liczbę zmian znaku (nie wliczając w to zer) w ciągu $p_0(t), p_1(t), \dots$. Wówczas wielomian p ma w przedziale $(a, b]$ *dokładnie* $V(a) - V(b)$ pierwiastków.

6.19. Wyznacz liczbę pierwiastków rzeczywistych wielomianu

$$x^4 - 10x^3 + 34x^2 - 50x + 25$$

większych od 1.

Zadania pochodzą z serii książek A. Neugebauera *Matematyka Olimpijska*, materiałów CKE, forum artofproblemso-lving.com, materiałów z zajęć Deltaklubu w Płocku oraz folkloru.