

Pierwiastki, sprzężenia i rekurencje feat. zadania od CKE, 28.04.2026

Z oficjalnego zbioru zadań, $\{7.1., 7.2., 7.3.\} \subseteq \text{CKE} + \varepsilon$.

7.1. Udowodnij, że dla $n \in \mathbb{Z}$ liczba $(\sqrt{5} + 2)^n + (\sqrt{5} - 2)^n$ jest wymierna wtedy i tylko wtedy gdy n jest liczbą parzystą.

7.2. Udowodnij, że jeśli $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ oraz $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} = 0$, to $a = b = c = d = 0$.

7.3. Oblicz $\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}}$.

7.4. Udowodnij, że dla $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ zachodzi $\sqrt{z} = \pm \frac{z + |z|}{\sqrt{2(\operatorname{Re} z + |z|)}}$.

7.5. Niech d będzie liczbą bekwadratową, a a, b - liczbami wymiernymi różnymi od 0. Udowodnij, że jeśli $\sqrt{a + b\sqrt{d}} = r\sqrt{x} + s\sqrt{y}$ dla pewnych liczb bekwadratowych x, y oraz wymiernych r, s , to dla pewnej liczby bekwadratowej z oraz wymiernych u, v zachodzi $\sqrt{a + b\sqrt{d}} = \sqrt{z} (u + v\sqrt{d})$.

7.6. Zapisz w (subiektywnie) najprostszej postaci $\cos \frac{\pi}{5}$, $\sin \frac{\pi}{5}$, $\cos \frac{2\pi}{5}$, $\sin \frac{2\pi}{5}$.

7.7. Niech d będzie nierozkładalną kwadratową modulo liczba pierwsza p . Udowodnij, że dla każdego $z \in \mathbb{Z}_p[\sqrt{d}]$ zachodzi $z^{p^2} = z$ oraz p^2 jest najmniejszą liczbą o tej własności.

7.8. Przypuśćmy, że równanie $t^3 + ut + v = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste. Zapisz je jawnym wzorem.

7.9. Udowodnij, że dla $n \in \mathbb{N}_+$, liczba $\cos^n \left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos^n \left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos^n \left(\frac{6\pi}{7}\right)$ jest liczbą wymierną, która ma przedstawienie w postaci ułamka o całkowitym liczniku i mianowniku 2^n .

7.10. Udowodnij, że dla $n \in \mathbb{N}_+$, liczba $\sqrt[n]{\sqrt{7} + \sqrt{6}} - \sqrt[n]{\sqrt{7} - \sqrt{6}}$ jest niewymierna.

7.11. Udowodnij, że ciąg Fibonacciego F_n spełnia tożsamość $F_{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k$.