Nierówności feat. zadania od CKE, 06.05.2026

Z oficjalnych źródeł, $\{8.1, 8.2, 8.3\} \subseteq \text{CKE} + \varepsilon$.

8.1. Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej a i dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej b takich, że $b \neq \frac{1}{2}a$, prawdziwa jest nierówność $(a+2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2$.

8.2. Wysokość h stożka jest większa od 5, a odległość środka podstawy od tworzącej jest równa 5. Udowodnij, że jego objętość wyraża się wzorem $V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^3}{h^2-25}$ oraz znajdź $h \in (5, \infty)$, dla którego to wyrażenie przyjmuje wartość najmniejszą.

8.3. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = x^4 + \frac{1}{2}(2x+1)^4$. Udowodnij, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $f(x) \geq \frac{1}{54}$.

8.4. Która z liczb 31^{11} oraz 17^{14} jest większa?

8.5. Udowodnij, że $4^{79} < 2^{100} + 3^{100} < 4^{80}$.

8.6. Punkt D leży wewnątrz trójkąta ABC. Udowodnij, że $AD + DC < AB + BC$.

8.7. Udowodnij, że suma długości środkowych trójkąta ABC jest mniejsza lub równa jego obwodowi.

8.8. Udowodnij, że jeśli D leży wewnątrz trójkąta równobocznego ABC, to suma kwadratów odległości D od prostych AB, BC, CA jest najmniejsza, gdy D jest środkiem ciężkości.

8.9. W poprzednim zadaniu usuńmy założenie o równoboczności trójkąta ABC. Udowodnij, że najmniejsza wartość wspomnianej sumy kwadratów jest równa $\frac{4P^2}{a^2+b^2+c^2}$, gdzie a, b, c są długościami boków, a P polem trójkąta ABC.

8.10. Niech d będzie długością przekątnej prostopadłościanu, a S jego polem powierzchni całkowitej. Udowodnj, że $2d^2 \geq S$.

8.11. Udowodnij, że wśród czworokątów o danym obwodzie największe pole ma kwadrat.

8.12. Niech R i r będą odpowiednio promieniem okręgu opisanego i wpisanego w pewien trójkąt. Udowodnij, że $R \geq 2r$.

8.13. Jaką największą wartość może przyjąć wyrażenie $\min\left(x, \frac{1}{y}, y + \frac{1}{x}\right)$ dla $x, y > 0$?

8.14. Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi $x(x+1)(x+2)(x+3) \geq -1$.

8.15. Udowodnij, że jeśli $x + y + z \geq xyz$, to $x^2 + y^2 + z^2 \geq xyz$.

8.16. Niech F_n będzie ciągiem Fibonacciego. Udowodnj, że dla $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi $\operatorname{arc\,ctg} F_3 + \operatorname{arc\,ctg} F_5 + \ldots + \operatorname{arc\,ctg} F_{2n+1} < \frac{\pi}{4}$.

Zadania pochodzą z serii książek A. Neugebauera *Matematyka Olimpijska*, książki *Mathematical Circles* autorstwa D. Fomina, S. Genkina i I. Itenberga, forum artofproblemsolving.com oraz folkloru.