Niezmienniki, 13.05.2026

9.0. Na pręcie długości 1 m (tzn. odcinku długości 1) znajduje się n mrówek (tzn. punktów materialnych). Każda z nich porusza się z szybkością 1 cm/s w prawo lub w lewo. Kiedy dwie mrówki miałyby się zderzyć, każda z nich zmienia zwrot, w którym się porusza. Kiedy mrówka dojadzie do któregoś z końców, zostaje zjedzona przez mrówkojada. Czy istnieje taki początkowy układ mrówek i zwrotów ich prędkości, że po 2 minutach zostanie przy życiu przynajmniej jedna mrówka?

9.1. Na tablicy napisano liczby $1, 2, 3, \ldots, 19, 20$. Jedna operacja polega na wybraniu dwóch liczb, zmazaniu ich i napisaniu w ich miejscu liczby $a+b-1$. Jaka liczba pozostanie na tablicy po 19 operacjach?

9.2. Zadanie jak wyżej, ale $ab + a + b$ w miejscu $a + b - 1$.

9.3. Dana jest tablica $n \times n$ światełek (po polsku: LED matrix), z których tylko lewe górne jest wyłączone. Czy da się, stosując pewną liczbę razy operację przełączenia wszystkich światełek w jednym wierszu lub jednej kolumnie, doprowadzić do stanu, w którym włączone są wszystkie?

9.4. To samo zadanie, ale zaczynamy z wyłączonymi światełkami w czterech rogach.

9.5. Skoczkiem na sterydach nazwiemy firgurę szachową poruszającą się o jedno pole w jednym kierunku i 3 pola w drugim. Czy skoczek na sterydach może w pwnej liczbie ruchów przejść z d4 na e4?

9.6. Czy zwykły skoczek może przejść przez wszytskie pola szachownicy $4 \times n$ dokładnie raz i wrócić do początkowego?

9.7. Jaka jest najmniejsza liczba ruchów potrzebna, ab zwykły skoczek przemieścił się z narożnika szachownicy $n \times n$ do przeciwległego narożnika?

9.8. Na trójkach liczb (a, b, c) możemy wykonywać operację polegającą na wybraniu dwóch z nich - niech będą to x, y - i zastąpieniu ich przez $\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}}$. Czy można po pewnej liczbie operacji z $\left(1, \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\right)$ uzyskać $(2, \sqrt{2}, \sqrt{2}/2)$?

9.9. Na trójkach liczb (a, b, c) możemy wykonywać operację polegającą na wybraniu dwóch z nich - niech będą to x, y - i dodaniu do trzeciej z nich $q(x - y)$, gdzie q jest pewną liczbą wymierną. Czy można po pewnej liczbie operacji z $\left(0, 1, \sqrt{2}\right)$ uzyskać $\left(0, 2, \sqrt{2}\right)$?

9.10. Doom Slayer walczy z hydrą o 777 głowach. Może uciąć jej 67 główmieczem, ale odrośnie jej 487 głów. Może też strzelić do hydry z granatnika, niszcząc 1337 głów, ale odrośnie jej wtedy 77, a ponadto granatnik przechodzi tryb uśpienia, gdy hydra ma mniej niż 1337 głów. Czy Doom Slayer, mając dowolnie dużo czasu, może pokonać hydrę?

9.11. Na podłodze stoi 10 wiader z kamieniami. W jednym ruchu możemy wybrać 7 wiader i dorzucić do każdego z nich jeden kamień. Czy można w ten sposób doprowadzić do wyrównania liczby kamieni? Co jeśli zastąpimy 10, 7 przez a, b dla $a \geq b$?

Offftopic:

9.12. Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ istnieje dokładnie jeden wielomian P stopnia n o współczynnikach rzeczywistych taki, że $P(0) = 1$ oraz funkcja $x \mapsto (1 + x)P(x)^2 - 1$ jest nieparzysta.

9.13. Oblicz $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k)!}$.

9.14. Udowodnij, że dla liczb dodatnich p, q spełniających $p + q = 1$ oraz liczb naturalnych n, m zachodzi nierówność $(1 - p^m)^n + (1 - q^n)^m \geq 1$.

Zadania pochodzą z serii książek A. Neugebauera *Matematyka Olimpijska*, książki *Mathematical Circles* autorstwa D. Fomina, S. Genkina i I. Itenberga, forum artofproblemsolving.com oraz folkloru.