Geometria, 20.05.2026

10.0. Dane jest $n \geq 3$ niewspółliniowych punktów na płaszczyźnie. Udowodnij, że istnieje wielokąt (tzn. łamana zamknięta bez samoprzecięć), którego zbiór wierzchołków zawiera się w danym zbiorze punktów.

10.1. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Znajdź taki punkt X, dla którego suma odległości od punktów A, B, C, D jest najmniejsza.

10.2. Czworokąt wypukły ABCD jest wpisany w okrąg i spełnia warunki $\measuredangle ACB = 2 \cdot \measuredangle CAD$ oraz $\measuredangle ACD = 2 \cdot \measuredangle CAB$. Wykaż, że $CB + CD = CA$.

10.3. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC. Punkty D, E, F są punktami symetrycznymi do punktu P odpowiednio względem prostych BC, CA, AB. Wówczas, jeżeli trójkąt DEF jest równoboczny, to proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

10.4. Niech AD, BE będą dwusiecznymi kątów ostrych trójkąta prostokątnego ABC. Niech D', E' będą rzutami punktów D, E na przeciwprostokątną AB. Znajdź miarę kąta $D'CE'$.

10.5. Podziel kwadrat na trójkąty ostrokątne. Jaka jest najmniejsza liczba takich trójkątów?

10.6. Punkt P należy do boku CD kwadratu $ABCD$; dwusieczna kąta BAP przecina bok BC w punkcie S. Wykaż, że $BS + DP = AP$.

10.7. Czworokąty $ABCD$ i $XYZT$ są kwadratami (wierzchołki są opisane w kolejności przeciwnej do ruchu wskazówek zegara). Okrąg ω o promieniu r jest styczny do odcinków CD i DA w punktach Z i Q. Długość odcinka DT jest równa 2. Punkt Y leży na okręgu ω. Oblicz r.

Zadania pochodzą z serii książek A. Neugebauera *Matematyka Olimpijska*, książki *Mathematical Circles* autorstwa D. Fomina, S. Genkina i I. Itenberga, forum artofproblemsolving.com, materiałów J. Bednarczuka oraz folkloru.