Nierówności, 27.05.2026

11.0. Punkty P, Q leżą odpowiednio na bokach BC, CA trójkąta ABC. Półproste AP i BQ są dwusiecznymi kątów $\measuredangle BAC$ i $\measuredangle CBA$. Udowodnij, że jeśli odcinki BC, CA są równej długości, to trójkąt ABC jest równoramienny.

11.1. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi

$$|x + y + |y + z| + |z + x| \leq |x| + |y| + |z| + |x + y + z|.$$

11.2. Niech $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ będa takie, że $\sum_{i=1}^n c_i = 0$. Udowodnij, że

$$n \sum_{i=1}^{n} |c_i| \leq 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} |c_i - c_j| \, .$$

11.3. Udowodnij, że dla $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq (a + b + c + d)e.$$

11.4. Niech $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ będą liczbami dodatnimi takimi, że $a_1 + \ldots + a_n = b_1 + \ldots + b_n$.. Udowodnij, że

$$\frac{a_1^2}{a_1 + b_1} + \ldots + \frac{a_n^2}{a_n + b_n} \geq \frac{a_1 + \ldots + a_b}{2}.$$

11.5. Niech α, β, γ będą kątami w trójkącie, a x, y, z dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Udowodnij, że

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2(yz \cos\alpha + zx \cos\beta + xy \cos\gamma).$$

11.6. Niech a, b, c będą długościami boków trójkąta o polu P oraz $u, v, w > 0$. Udowodnij, że

$$\frac{u}{v + w} a^2 + \frac{v}{w + u} b^2 + \frac{w}{u + v} c^2 \geq 2\sqrt{3} P.$$

11.7. Niech $a, b, c, x, y, z \geq 0$. Udowodnij, że

$$(ay + az + bz + bx + cx + cy)^2 \geq 4(bc + ca + ab)(yz + zx + xy).$$

11.8. Udowodnij, że dla liczb nieujemnych $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ zachodzi

$$\sum_{i,j} \min\left(a_i a_j, b_i b_j\right) \leq \sum_{i,j} \min\left(a_i b_j, a_j b_i\right).$$

11.9. Niech $n \geq 2$. Znajdź maksymalne wartości wyrażeń

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \ldots + a_{n-1} a_n \text{ oraz } a_1 a_2 + a_2 a_3 + \ldots + a_{n-1} a_n + a_n a_1,$$

gdzie liczby $a_1, \ldots, a_n$ są nieujemne oraz $a_1 + \ldots + a_n = 1$.

11.10. Udowodnij, że dla $a, b, c, d > 0$ zachodzi

$$a^4 b + b^4 c + c^4 d + d^4 a \geq abcd(a + b + c + d).$$

11.11. Udowodnij, że dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ (a tak naprawdę to $\mathbb{R}$) zachodzi nierówność

$$\frac{1}{3}\left(a^4 + b^4 + c^4\right) + \frac{2}{3}\left(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2\right) \geq a^3 b + b^3 c + c^3 a.$$

Offtopic:

11.12. Punkty A, P, C, D, Q, D leżą w tej kolejności na prostej ℓ, przy czym D jest środkiem AB. Półokręgi ω_1, ω_2 o średnicach odpowiednio AB, CD leżą po tej samej stronie prostej ℓ. Okręgi ω_3, ω_4 są styczne do ℓ odpowiednio w P, Q, wewnętrznie do ω_1, zewnętrznie do ω_2 i zewnętrznie do siebie nawzajem. Udowodnij, że $|AB| = 6|CD|$.

Zadania pochodzą z serii książek A. Neugebauera *Matematyka Olimpijska*, książki *Mathematical Circles* autorstwa D. Fomina, S. Genkina i I. Itenberga, forum artofproblemsolving.com, materiałów J. Bednarczuka oraz folkloru.