

12.0. Niech $\alpha, \beta > 0$. Udowodnij, że α, β są liczbami niewymiernymi spełniającymi $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{N}_+$ jest sumą rozłączną zbiorów $\{\lfloor n\alpha \rfloor : n \in \mathbb{N}_+\}$ oraz $\{\lfloor n\beta \rfloor : n \in \mathbb{N}_+\}$.

12.1. Udowodnij, że jeśli $n \in \mathbb{N}$ oraz $n \geq 2$, to n nie dzieli $2^n - 1$.

12.2. Udowodnij, że jeśli $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ oraz n jest nieparzyste, to n nie dzieli $3^n - 1$.

12.3. Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi

$$2^{16} - 2^4 \mid n^{16} - n^4.$$

12.4. Udowodnij, że jeśli $\{r_1, \dots, r_{\varphi(n)}\}$ jest zbiorem wszystkich liczb $\leq n$ względnie pierwszych z n , to

$$r_1 \cdot \dots \cdot r_{\varphi(n)} \equiv \pm 1 \pmod{n},$$

gdzie reszta -1 występuje dla n równych $2, 4, p^k, 2p^k$ (p - nieparzysta liczba pierwsza, $k \in \mathbb{N}_+$) a 1 dla pozostałych n .

12.5. Liczby całkowite $b, a_1, \dots, a_{20}$ spełniają równość

$$b^{11} = \sum_{k=1}^{20} a_k^{11}.$$

Udowodnij, że iloczyn $ba_1 \dots a_{20}$ dzieli się przez 23.

12.6. Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi

$$547 \mid n^{n^4} - n^{n^2}.$$

12.7. Danych jest m ciągów arytmetycznych dwustronnych, tzn. postaci $(at + b)_{t \in \mathbb{Z}}$. Udowodnij, że jeśli każde dwa z nich mają wspólny wyraz (tzn. element zbioru wyrazów), to wszystkie mają wspólny wyraz.

12.8. Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi

$$\sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \varphi(k) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

12.9. Niech $i(n)$ będzie iloczynem wszystkich dzielników liczby naturalnej n . Czy funkcja $i : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$ jest różnowartościowa?

12.10. Niech $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją spełniającą $f(x) = 0$ dla $x \in (0, 1)$. Udowodnij, że jeśli

$$F(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}_+} f\left(\frac{x}{k}\right), \quad \text{to} \quad f(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}_+} \mu(k) F\left(\frac{x}{k}\right).$$

12.11. Udowodnij, że równanie $x^2 + 4 = y^5$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych.

12.12. Udowodnij, że równanie $x^2 + y^2 = 3z^2$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych.

12.13. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele potęg liczby 2008, w których zapisie dziesiętnym występują kolejno cyfry 2, 0, 0, 8.