

Wielomiany, 10.06.2026

13.0. Znajdź wszystkie wielomiany f takie, że $xf(x-1) = (x+1)f(x)$ dla każdego x .

13.1. Udowodnij, że istnieje wielomian $f \in \mathbb{Z}[x]$ taki, że dla $0.1 < x < 0.9$ zachodzi $|f(x) - 0.5| < 0.001$.

13.2. Znajdź wszystkie liczby niewymierne x takie, że $x^2 + 2x$ oraz $x^3 - 6x$ są liczbami wymiernymi.

13.3. Znajdź wszystkie wielomiany f o współczynnikach całkowitych takie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi $f(n) \mid 2^n - 1$.

13.4. Udowodnij, że jeśli $f \in \mathbb{R}[x]$ oraz $f(x) \geq 0$ dla każdego x , to $f = u^2 + v^2$ dla pewnych $u, v \in \mathbb{R}[x]$.

13.5. Dodatnie liczby wymierne a, b spełniają równość $a^3 + 4a^2b = 4a^2 + b^4$. Udowodnij, że liczba $\sqrt{a} - 1$ jest kwadratem liczby wymiernej.

13.6. Znajdź taki wielomian $\Psi \in \mathbb{R}[p, q, r]$, że dla każdych $p, q, r \in \mathbb{R}$ warunek $\Psi(p, q, r) \geq 0$ jest równoważny z tym, że $t^3 - pt^2 + qt - r$ ma 3 pierwiastki rzeczywiste (z krotnościami).

13.7. Wielomian $f \in \mathbb{Z}[x]$ spełnia $f(m) > m$ dla każdej liczby naturalnej m . Niech $a_1 = 1$ oraz $a_{n+1} = f(a_n)$. Ponadto dla każdej liczby $d \in \mathbb{N}_+$ istnieje takie n , że $d \mid a_n$. Udowodnij, że $f(x) = x + 1$.

13.8. Udowodnij, że jeśli jeden z 3 pierwiastków wielomianu $ax^3 + bx + c \in \mathbb{Q}[x]$ jest iloczynem dwóch pozostałych, to jest liczbą wymierną.

13.9. Liczby całkowite a, b, c są parami różne oraz $n \in \mathbb{N}_+$. Udowodnij, że liczba

$$\frac{a^n}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^n}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^n}{(c-a)(c-b)} \in \mathbb{Z}.$$

13.10. Znajdź wszystkie wielomiany W o współczynnikach rzeczywistych o następującej własności: dla dowolnych a, b, c będących długościami boków trójkąta i dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z o sumie 0 zachodzi nierówność

$$W(a)yz + W(b)zx + W(c)xy \leq 0.$$

13.11. Znajdź wszystkie wielomiany $f \in \mathbb{Z}[n]$ takie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$, liczba $f(n)$ jest podzielna przez sumę wszystkich dzielników n .

13.12. Wielomiany moniczne $f, g \in \mathbb{R}[x]$ spełniają $f(f(x)) = g(g(x))$ dla każdego x . Udowodnij, że $f = g$.

Offtopic:

13.13. Dla jakich n istnieje takie kolorowanie wierzchołków hiperkostki $[0, 1]^n$ przy pomocy n kolorów, że dla każdego wierzchołka, wierzchołki połączone z nim krawędziami mają wszystkie n kolorów?

13.14. W prawym górnym rogu szachownicy $n \times m$ ($n \leq m$) stoi hetman. Gracze mogą na przemian wykonywać nim ruchy o dowolną liczbę pól w lewo, w dół lub na skos w lewo i w dół. Wygrywa ten, kto doprowadzi hetmana do lewego dolnego rogu. Niech $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$. Udowodnij, że zbiór takich par (n, m) , że rozpoczynający gracz nie ma strategii wygrywającej, to

$$\{([k\varphi], [k\varphi^2]) : k \in \mathbb{N}_+\}.$$

13.15. Liczby rzeczywiste $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ spełniają $\sum_{k=1}^n ka_k = 0$. Udowodnij, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $\sum_{k=1}^n [kx]a_k \geq 0$.