Autoreferat do wniosku habilitacyjnego

1 Imię i nazwisko

dr Damian Longin Osajda
Department of Mathematical Sciences
University of Copenhagen
Universitetsparken 5 2100 København Ø., Dania.
e-mail: dalosaj@gmail.com
WWW: https://www.math.uni.wroc.pl/~dosaj/

2 Posiadane dyplomy i stopnie naukowe

- DOKTOR NAUK MATEMATYCZNYCH: rozprawa doktorska *The topology of the punctured Banach–Mazur compacta*, napisana pod kierunkiem prof. dr. hab. Tadeusza Januszkiewicza, obroniona w Instytucie Matematycznym PAN, styczeń 2004.
- MAGISTER MATEMATYKI: praca *Generalized Banach–Mazur compacta*, napisana pod kierunkiem prof. dr. hab. Tadeusza Januszkiewicza, obroniona w Instytucie Matematycznym Uniwersytetu Wrocławskiego, wrzesień 1999.

3 Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu

- 1.10.2003—30.09.2004 asystent, Instytut Matematyczny PAN, Wrocław
- 1.10.2004—30.09.2005 asystent, Instytut Matematyczny Uniwersytet Wrocłąwski
- 1.10.2005—30.09.2007 post-doc, Marie Curie Intra European Fellowship, Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris VI
- 1.09.2007—31.12.2007 post-doc, "Semester in Geometric Group Theory", MSRI in Berkeley
- 1.10.2007—30.09.2008 asystent, Instytut Matematyczny Uniwersytet Wrocłąwski
- 1.10.2008—28.02.2009 post-doc, CNRS, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Strasbourg, France
- od 1.03.2009 adiunkt, Instytut Matematyczny Uniwersytet Wrocłąwski
- 1.07.2009—31.12.2009 post-doc, Laboratoire Paul Painlevé, Université Lille I, France
- 1.02.2010—31.05.2010 Leibniz fellow, Mathematisches Forschungsinstitut, Oberwolfach, Germany

- 1.10.2010—30.09.2014 assistant professor, Fakultät für Mathematik, University of Vienna, Austria
- 1.09.2014—30.09.2023 adiunkt, Instytut Matematyczny PAN, Wrocław
- 1.10.2016—30.06.2017 visiting professor, Dept. of Math. and Stats., McGill University, Montreal, Kanada
- 1.10.2018—30.06.2019 visiting professor, Dept. of Math. and Stats., McGill University, Montreal, Kanada
- 1.09.2022—31.05.2024, associate professor, University of Copenhagen, Dania
- 6.03.2023—30.06.2023, visiting professor (CRM-Simons Professor), CRM, Montreal, Kanada
- od 1.06.2024, professor, University of Copenhagen, Dania
- 31.08.2025-7.11.2025, visiting scholar, Isaac Newton Institute, Cambridge

4 Omówienie osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 Ustawy

4.1 Tytuł osiągnięcia naukowego

Konstrukcje grup z użyciem niedodatniej krzywizny

4.2 Cykl artykułów naukowych

[H1] Damian Osajda, *A construction of hyperbolic Coxeter groups*, Comment. Math. Helv. **88** (2013), no. 2, 353–367.

[H2] Damian Osajda, *Group cubization*, Duke Math. J. **167** (2018), no. 6, 1049–1055.

[H3] Damian Osajda, *Small cancellation labellings of some infinite graphs and applications*, Acta Math. **225** (2020), no. 1, 159–191.

[H4] Damian Osajda, *Residually finite non-exact groups*, Geom. Funct. Anal. **28** (2018), no. 2, 509–517.

Omówienie celu naukowego wyżej wymienionych prac i osiągniętych wyników

4.3 Wstęp

4.3.1 Krótkie podsumowanie wyników z prac [H1]–[H3]

W tym miejscu przedstawiam krótkie streszczenia wyników prac [H1]–[H3], zaczerpnięte z abstraktów artykułów.

W artykule [H1] przedstawiam prostą konstrukcję hiperbolicznych (w sensie Gromowa) grup Coxetera o dowolnie dużym wirtualnym wymiarze kohomologicznym. Konstrukcja ta dostarcza nowych przykładów takich grup. W szczególności pozwala ona konstruować nowe grupy o interesujących własnościach asferyczności.

W artykule [H2] wprowadzam procedurę tzw. kubizacji grupy (ang. group cubization). Prowadzi ona do otrzymania grupy, której pewne własności przypominają własności danej grupy wyjściowej, oraz która działa bez punktów stałych na kostkowym kompleksie CAT(0). Jako główne zastosowanie wykazuję brak własności (T) Kazhdana dla grup Burnside'a.

W artykule [H3] konstruuję etykietowania spełniające warunki małych skreśleń dla pewnych nieskończonych ciągów grafów skończonych o ograniczonym stopniu. Wykorzystuję je do zdefiniowania nieskończonych graficznych prezentacji grup małych skreśleń. Technika ta pozwala mi otrzymać przykłady grup o egzotycznych własnościach:

- Konstruuję pierwsze przykłady skończenie generowanych grup zgrubnie nieśredniowalnych (to znaczy grup bez własności A Guolianga Yu), które są jednocześnie zgrubnie zanurzalne w przestrzeń Hilberta. Co więcej, grupy te działają właściwie na kostkowych kompleksach CAT(0).
- Konstruuję pierwsze przykłady skończenie generowanych grup, w których ekspandery (ang. expander graphs) są zanurzone izometrycznie w grafach Cayleya — w przeciwieństwie do tzw. potworów Gromowa, gdzie ekspandery nie są nawet zanurzone zgrubnie.

Przedstawiam również dalsze zastosowania tej techniki, na przykład do konstruowania egzotycznych rozmaitości asferycznych.

W artykule [H4] konstruuję pierwsze przykłady rezydualnie skończonych grup niedokładnych (ang. non-exact).

4.3.2 Opis ogólny

Grupy są fundamentalnymi obiektami matematycznymi, które pojawiają się naturalnie w wielu działach matematyki oraz mają głębokie powiązania z fizyką, informatyką i dyscyplinami pokrewnymi. W szczególności grupy kodują symetrie, opisują struktury algebraiczne i kombinatoryczne oraz stanowią podstawowe modele zjawisk dyskretnych i ciągłych.

Moje badania sytuują się w obrębie *Geometrycznej Teorii Grup* (ang. *Geometric Group Theory*, GGT), stosunkowo młodej i dynamicznie rozwijającej się dziedziny matematyki, która ukształtowała się w ciągu ostatnich kilkudziesięciu lat. Geometryczna Teoria Grup bada grupy nieskończone poprzez wyposażanie ich w struktury geometryczne lub topologiczne, a następnie wykorzystywanie intuicji i metod geometrycznych do wyprowadzania własności algebraicznych, analitycznych i dynamicznych badanych grup. Dyscyplina ta czerpie z idei kombinatorycznej teorii grup, topologii algebraicznej, geometrii różniczkowej oraz geometrii metrycznej i doprowadziła do wielu przełomowych wyników, które były niedostępne przy użyciu wyłącznie metod algebraicznych. Jedną z podstawowych zasad GGT jest to, że postrzeganie grupy jako obiektu geometrycznego często ujawnia głębokie informacje o jej strukturze.

Centralnym motywem moich badań jest systematyczne wykorzystanie różnych pojęć *nieujemnej krzywizny* (NPC). Wywodząca się z geometrii różniczkowej nieujemna krzywizna stała się jednym z najpotężniejszych i najbardziej jednoczących pojęć we współczesnej GGT. Grupy działające geometrycznie na przestrzeniach o nieujemnej krzywiźnie — takich jak przestrzenie hiperboliczne w sensie Gromowa, przestrzenie CAT(0) lub ich kombinatoryczne odpowiedniki — posiadają bogaty zbiór silnych własności, obejmujących zjawiska sztywności, rozwiązywalność algorytmiczną oraz korzystne własności analityczne i kohomologiczne. Do spektakularnych zastosowań technik NPC należy na przykład rozwiązanie wirtualnej hipotezy Hakena przy użyciu CAT(0) kompleksów kostkowych.

Moje prace koncentrują się w szczególności na *kombinatorycznej nieujemnej krzywiźnie* (CNPC), czyli na dyskretnych i kombinatorycznych analogach klasycznych warunków krzywizny. W ostatnich latach CNPC wyłoniła się jako ujednolicający formalizm obejmujący szeroką gamę istotnych struktur, takich jak kompleksy systoliczne, CAT(0) kompleksy kostkowe, kompleksy Helly'ego i bukoliczne, a także graficzne kompleksy małych skreśleń. Jednym z oryginalnych aspektów moich badań jest rozwijanie nowych wersji CNPC oraz systematyczne wykorzystywanie tych pojęć do konstruowania i analizowania grup o zadanych własnościach geometrycznych i algebraicznych.

Ogólnie rzecz biorąc, można wyróżnić trzy główne sposoby stosowania metod nieujemnej krzywizny w Geometrycznej Teorii Grup:

1. rozwijanie ogólnej teorii nieujemnej krzywizny (NPC), w szczególności kombinatorycznej nieujemnej krzywizny (CNPC), dla przestrzeni i grup;

2. ujawnianie nowych własności znanych (klasycznych) przestrzeni i grup;

3. konstruowanie nowych przykładów przestrzeni i grup o interesujących (często nieoczekiwanych) własnościach.

Osiągnięcie habilitacyjne przedstawione w niniejszej pracy dotyczy przede wszystkim podejścia opisanego w punkcie 3. Głównym celem prac składających się na to osiągnięcie jest konstruowanie nowych klas grup i przestrzeni przy użyciu technik CNPC oraz wykazanie, że konstrukcje te prowadzą do przykładów o nieoczekiwanych własnościach.

W szczególności artykuły wchodzące w skład niniejszego osiągnięcia habilitacyjnego rozwijają nowe metody konstrukcyjne oparte na nieujemnej krzywiźnie i prowadzą do uzyskania:

- hiperbolicznych (w sensie Gromowa) grup Coxetera o dowolnie dużym wirtualnym wymiarze kohomologicznym, w tym przykładów wykraczających poza wcześniej znane schematy;

- nowych konstrukcji grup działających na CAT(0) kompleksach kostkowych metodą kubizacji grup, wraz z zastosowaniami do zagadnień dotyczących własności (T) Kazhdana dla grup torsyjnych;

- grup zadanych przez graficzne prezentacje małych skreśleń, zawierających ekspandery lub inne zadane grafy zanurzone izometrycznie w ich grafach Cayleya, co prowadzi do przykładów o egzotycznym zachowaniu z punktu widzenia geometrii zgrubnej i analizy;
- pierwszych przykładów skończenie generowanych rezydualnie skończonych grup niedokładnych (non-exact), otrzymanych poprzez połączenie technik małych skreśleń z precyzyjną kontrolą rezydualnej skończoności.

Łącznie wyniki te ilustrują skuteczność kombinatorycznej nieujemnej krzywizny jako narzędzia do konstruowania i kontrolowania grup o złożonym i nieoczekiwanym zachowaniu. Pokazują one również, w jaki sposób metody CNPC oddziałują z problemami geometrii zgrubnej, algebr operatorowych oraz K-teorii, umiejscawiając prezentowane osiągnięcia w szerokim kontekście współczesnej Geometrycznej Teorii Grup.

4.4 Wstępne pojęcia

W niniejszym rozdziale przedstawiam pojęcia oraz podstawowe fakty, które będą wykorzystywane w dalszej części, w szczególności w Rozdziale 4.5, do opisu uzyskanych wyników.

4.4.1 Kompleksy symplicjalne

Niech X będzie kompleksem symplicjalnym. Przez $X^{(i)}$ oznaczamy *i–szkielet* kompleksu X. Podkompleks Y kompleksu X nazywamy *pełnym*, jeżeli każdy zbiór A wierzchołków Y, który zawiera się w sympleksie kompleksu X, zawiera się również w pewnym sympleksie kompleksu Y. Dla skończonego zbioru wierzchołków $A = \{v_1, \ldots, v_k\}$ kompleksu X przez $\mathrm{span}(A)$ lub $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ oznaczamy *kompleks rezpięty przez* zbiór A, tj. najmniejszy pełny podkompleks kompleksu X zawierający A. Kompleks symplicjalny X nazywamy *flagowym*, jeżeli każdy skończony zbiór wierzchołków X, które są parami połączone krawędziami w X, zawiera się w pewnym sympleksie kompleksu X. *Linkiem* sympleksu σ w X nazywamy kompleks symplicjalny

$$X_\sigma = \{\tau \mid \tau \in X,\ \tau \cap \sigma = \emptyset,\ \mathrm{span}(\tau \cup \sigma) \in X\}\,.$$

Niech $k \geq 4$. *k–cyklem* $(v_0, \ldots, v_{k-1}, v_0)$ nazywamy triangulację okręgu składającą się z k krawędzi $(\langle v_i, v_{i+1 \pmod k} \rangle)$ oraz k wierzchołków $v_0, \ldots, v_{k-1}$. Dla $k \geq 4$ flagowy kompleks symplicjalny X nazywamy *k–dużym*, jeżeli nie zawiera on żadnych j–cykli będących pełnymi podkompleksami X dla $j < k$ (przypadek 4–duży oznacza po prostu flagowy). Innymi słowy, dla $j < k$ każdy j–cykl posiada *przekątną*, tj. krawędź łączącą dwa niesąsiednie wierzchołki. Zamiast określenia 5–duży używa się czasem terminu *flagowy bez kwadratów*. Kompleks nazywamy *lokalnie k–dużym*, jeżeli wszystkie jego linki są k–duże. Flagowy kompleks symplicjalny nazywamy *k–systolicznym* (zgodnie z [JSa06]), $k \geq 4$, jeżeli jest on jednospójny oraz lokalnie k–duży. Grupę działającą geometrycznie (tj. właściwie i kozwarcie przez automorfizmy) na k–systolicznym kompleksie nazywamy również *k–systoliczną*. Terminu *systoliczny* używamy jako skrótu dla „6–systoliczny".

Dla $i \in \mathbb{N}$ *(kombinatoryczną) kulą* $B_i(v, X)$ o promieniu i wokół wierzchołka v w kompleksie symplicjalnym X nazywamy pełny podkompleks rozpięty przez zbiór wierzchołków leżących w odległości co najwyżej i od v. Odległość pomiędzy dwoma wierzchołkami rozumiemy tutaj jako minimalną liczbę krawędzi w ścieżce w 1–szkielecie łączącej te wierzchołki.

4.4.2 Kompleksy kostkowe

Kompleksy kostkowe są kombinatorycznymi kompleksami komórkowymi, w których każda komórka jest kostką. W szczególności oznacza to, że dowolne dwie kostki w kompleksie kostkowym przecinają się wzdłuż jednej wspólnej podkostki. *Linkiem* Y_v wierzchołka v kompleksu kostkowego Y jest kompleks symplicjalny, który można utożsamić z małą sferą wokół v (sympleksy Y_v są przecięciami tej sfery z kostkami). Kompleks kostkowy nazywamy *lokalnie* k*–dużym* (odpowiednio *lokalnie flagowym*), jeżeli linki jego wierzchołków są k–duże (odpowiednio flagowe). Lemat Gromowa (por. [Dav08, Dodatek I]) mówi, że jednospójny lokalnie flagowy (odpowiednio lokalnie 5–duży) kompleks kostkowy dopuszcza metrykę o nieujemnej (odpowiednio ujemnej) krzywiźnie, czyli innymi słowy metrykę CAT(0) (odpowiednio CAT(-1)).

Lemat 4.4.1 ([BC08, Section 2])**.** *Skończona rodzina parami nietrywialnie przecinających się wypukłych podkompleksów CAT*(0) *kompleksu kostkowego ma nietrywialne wspólne przecięcie.*

W szczególności każda kostka oraz 1*–kula wokół dowolnego wierzchołka* (tj. suma wszystkich kostek zawierających ten wierzchołek) są zbiorami wypukłymi.

4.4.3 Grupy Coxetera

Stosujemy terminologię i notację z książki Davisa [Dav08]. *Grupa Coxetera* dana jest prezentacją

$$W = \langle S \mid (st)^{m_{st}};\ s, t \in S\rangle,$$

gdzie S jest zbiorem skończonym, $m_{st} \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, $m_{st} = m_{ts}$ oraz $m_{st} = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $s = t$ (przy czym $(st)^\infty$ oznacza brak relacji). Grupę Coxetera (lub *system Coxetera* (W, S)) nazywamy *prostokątną*, jeżeli $m_{st} \in \{1, 2, \infty\}$. *Podgrupą specjalną* W_T grupy Coxetera W nazywamy podgrupę generowaną przez podzbiór $T \subseteq S$. Podzbiór $T \subseteq S$ nazywamy *sferycznym*, jeżeli W_T jest skończona; wówczas samą grupę W_T również nazywamy sferyczną. Przez $\mathcal{S}$ oznaczamy częściowo uporządkowany (względem inkluzji) zbiór wszystkich sferycznych podzbiorów S, a przez K — jego realizację geometryczną. Zbiór wszystkich niepustych sferycznych podzbiorów tworzy abstrakcyjny kompleks symplicjalny zwany *nerwem* $L = L(W, S)$ układu Coxetera (W, S). Dla $T \in \mathcal{S}$ przez σ_T oznaczamy sympleks w L rozpięty przez T (przy czym $\sigma_T = \emptyset$, gdy $T = \emptyset$). Realizację geometryczną posetu (względem inkluzji)

$$\bigcup_{T \in \mathcal{S}} W/W_T$$

nazywamy *kompleksem Davisa* i oznaczamy przez $\Sigma = \Sigma(W, S)$. W przypadku prostokątnym kompleks Σ posiada naturalną strukturę lokalnie flagowego kompleksu kostkowego. Dla $s \in S$

definiujemy K_s jako sumę wszystkich sympleksów w K, których minimalnym wierzchołkiem jest $\{s\}$. Dla $T \subseteq S$ kładziemy $K^T = \bigcup_{s \in T} K_s$. Dla $T \in \mathcal{S}$ można wykazać, że $L - \sigma_T$ deformacyjnie retrahuje się na K^{S-T}; por. [Dav08, Lemma A.5.5].

Z lematu Gromowa wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.4.2. *(Hiperboliczne prostokątne grupy Coxetera, [Mou88]) Prostokątna grupa Coxetera (W, S) jest hiperboliczna w sensie Gromowa wtedy i tylko wtedy, gdy jej nerw $L(W, S)$ jest 5–dużym (tj. flagowym bez kwadratów) kompleksem symplicjalnym.*

W istocie w tym przypadku kompleks Davisa $\Sigma(W, S)$ posiada naturalną strukturę lokalnie 5–dużego (tj. CAT(-1); por. Rozdział 4.4.2) kompleksu kostkowego.

4.4.4 Wirtualny wymiar kohomologiczny

Przypomnijmy (por. [Dav08, Rozdział 8.5]), że *wymiar kohomologiczny* grupy G definiuje się jako

$$\mathrm{cd}\, G = \sup \{n \mid H^n(G; M) \neq 0 \text{ dla pewnego } \mathbb{Z}G\text{−modulu } M\}.$$

Jeżeli grupa G posiada nietrywialną torsję, to $\mathrm{cd}\, G = \infty$. Dla grup *wirtualnie beztorsyjnych* (tj. takich, które posiadają beztorsyjną podgrupę o skończonym indeksie) wygodniejsze jest zatem następujące pojęcie.

Wirtualnym wymiarem kohomologicznym grupy G, oznaczanym przez $\mathrm{vcd}\, G$, nazywamy wymiar kohomologiczny dowolnej jej beztorsyjnej podgrupy o skończonym indeksie. Dla układu Coxetera (W, S) jak wyżej zachodzi następujące twierdzenie (gdzie $\overline{H}^*$ oznacza kohomologie zredukowane).

Twierdzenie 4.4.3 ([Dav08, Corollary 8.5.5])**.**

$$\begin{aligned} \mathrm{vcd}\, W &= \max \left\{n \mid H^n(K, K^{S-T}; \mathbb{Z}) \neq 0, \text{ dlapewnego } T \in \mathcal{S}\right\} \\ &= \max \left\{n \mid \overline{H}^{n-1}(L - \sigma_T; \mathbb{Z}) \neq 0, \text{ dlapewnego } T \in \mathcal{S}\right\}. \end{aligned}$$

Wniosek 4.4.4. *Jeżeli $\overline{H}^{n-1}(L; \mathbb{Z}) \neq 0$, to $\mathrm{vcd}\, W \geq n$.*

4.4.5 Pogrubienie CAT(-1) kompleksu kostkowego

Dla danego CAT(-1) kompleksu kostkowego istnieje związany z nim 5–duży (tj. flagowy bez kwadratów) kompleks symplicjalny, wprowadzony przeze mnie w [Osa13].

Definicja 4.4.5 (Pogrubienie)**.** Niech Y będzie kompleksem kostkowym. *Pogrubieniem* $Th(Y)$ kompleksu Y nazywamy kompleks symplicjalny zdefiniowany w następujący sposób. Wierzchołkami $Th(Y)$ są wierzchołki Y. Wierzchołki $v_1, \ldots, v_k$ kompleksu $Th(Y)$ rozpinają sympleks wtedy i tylko wtedy, gdy wierzchołki $v_1, \ldots, v_k \in Y$ (rozumiane jako wierzchołki Y) zawierają się w jednej wspólnej kostce kompleksu Y.

Lemat 4.4.6 (Lokalnie k–duże pogrubienie [Osa13])**.** *Niech $k \geq 4$ oraz niech Y będzie lokalnie k–dużym kompleksem kostkowym. Wówczas jego pogrubienie $Th(Y)$ jest lokalnie k–dużym kompleksem symplicjalnym.*

4.4.6 Lemat lokalny Lovásza

Lemat lokalny Lovásza jest standardowym narzędziem w kombinatoryce; por. np. [AS00]. Przedstawiam tutaj konkretną wersję używaną w [H3]. Przez $\Pr(A)$ oznaczamy (dyskretne) prawdopodobieństwo zdarzenia A, natomiast $\bar{A}$ oznacza zdarzenie przeciwne (dopełnienie).

Lemat 4.4.7 (Lemat lokalny Lovásza [AGHuR02, Lemma 1])**.** *Niech $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{A}_r$ będzie rozbiciem skończonego zbioru zdarzeń $\mathcal{A}$, przy czym $\Pr(A) = p_i$ dla każdego $A \in \mathcal{A}_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Załóżmy, że istnieją liczby rzeczywiste $0 \leq a_1, a_2, \ldots, a_r < 1$ oraz $\Delta_{ij} \geq 0$, $i, j = 1, 2, \ldots, r$, takie że spełnione są następujące warunki:*

- *(i) dla każdego zdarzenia $A \in \mathcal{A}_i$ istnieje zbiór $\mathcal{D}_A \subseteq \mathcal{A}$ taki, że $|\mathcal{D}_A \cap \mathcal{A}_j| \leq \Delta_{ij}$ dla wszystkich $j = 1, 2, \ldots, r$ oraz A jest niezależne od zbioru $\mathcal{A} \setminus (\mathcal{D}_A \cup \{A\})$,*
- *(ii) $p_i \leq a_i \prod_{j=1}^{r} (1 - a_j)^{\Delta_{ij}}$ dla wszystkich $i = 1, 2, \ldots, r$.*

Wówczas $\Pr\big(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \bar{A}\big) > 0$.

4.4.7 Graficzne małe skreślenia

Teoria graficznych małych skreśleń jest oczywistym uogólnieniem klasycznej teorii małych skreśleń; por. np. książkę Lyndona i Schuppa [LS77] jako standardowe wprowadzenie do tej ostatniej. Wprowadzenie teorii graficznej przypisuje się Gromowowi [Gro03], jednak stosowane tam metody pojawiały się wcześniej w sposób niejawny, na przykład w pracy Ripsa i Segeva [RS87].

Aby zastosować teorię małych skreśleń, korzystamy z ciągu $\Theta = (\Theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ skończonych spójnych grafów w następujący sposób. Niech Γ będzie grafem skończonym oraz niech $(\varphi_n \colon \Theta_n \to \Gamma)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie rodziną lokalnych izometrii grafów. Dane te wyznaczają *graficzną prezentację*

$$\langle \Gamma \mid \Theta \rangle, \tag{4.1}$$

która definiuje grupę

$$G := \pi_1(\Gamma) / \langle\langle \varphi_*(\pi_1(\Theta_n))_{n \in \mathbb{N}} \rangle\rangle.$$

W rozważanych przez nas przypadkach wybieramy Γ jako bukiet pętli, przy czym lokalne izometrie φ_n odpowiadają etykietowaniom m_n krawędzi grafów Θ_n. Każda pętla w bukiecie odpowiada jednemu generatorowi grupy G.

Poniżej opisujemy przestrzenie, z którymi będziemy dalej pracować. Niech $(\varphi_i \colon r_i \to X^{(1)})_{i \in \mathbb{N}}$ będzie rodziną lokalnych izometrii skończonych grafów r_i, które nazywamy *relatorami*. *Stożkiem* nad relatorem r_i nazywamy przestrzeń ilorazową

$$\operatorname{cone} r_i := (r_i \times [0,1]) / \{(x,1) \sim (y,1)\}.$$

Głównym obiektem naszych badań w tej sekcji jest *zestożkowana przestrzeń* (*coned–off space*)

$$X := X^{(1)} \cup_{(\varphi_i)} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \operatorname{cone} r_i,$$

gdzie φ_i oznacza odwzorowanie $r_i \times \{0\} \to X^{(1)}$. Zakładamy, że X jest jednospójna. Przestrzeń X posiada naturalną strukturę kompleksu CW i będziemy ją dalej nazywać po prostu *kompleksem*. Jeżeli nie zaznaczono inaczej, rozważamy na 0–szkielecie $X^{(0)}$ *metrykę drogową* $d(\cdot,\cdot)$ zadaną przez (kombinatoryczne) ścieżki w 1–szkielecie $X^{(1)}$. *Geodezyjnymi* nazywamy najkrótsze ścieżki w $X^{(1)}$ względem tej metryki.

Ścieżką w X nazywamy lokalnie injektywne symplicjalne odwzorowanie $p \to X$, gdzie graf p jest homeomorficzny z odcinkiem. Ścieżkę $p \to X$ nazywamy *kawałkiem* (*piece*), jeżeli istnieją relatory r_i, r_j takie, że $p \to X$ faktoryzuje się jako $p \to r_i \xrightarrow{\varphi_i} X$ oraz jako $p \to r_j \xrightarrow{\varphi_j} X$, lecz nie istnieje izomorfizm $r_i \to r_j$, który czyniłby następujący diagram przemiennym:

$$\begin{tikzcd} p \arrow[r] \arrow[d] & r_j \arrow[d] \\ r_i \arrow[r] \arrow[ur] & X \end{tikzcd}$$

Oznacza to, że ścieżka p występuje w r_i oraz r_j w dwóch istotnie różnych postaciach.

Dla $\lambda \in (0,1)$ mówimy, że kompleks X spełnia *warunek małych skreśleń* $C'(\lambda)$ (lub że X jest $C'(\lambda)$–*kompleksem*), jeżeli każdy kawałek $p \to X$, faktoryzujący się przez $p \to r_i \xrightarrow{\varphi_i} X$, ma długość (tj. liczbę krawędzi w p) ściśle mniejszą niż $\lambda \operatorname{girth} r_i$, gdize $\operatorname{girth} r_i$ oznacza *popręg* grafu, czyli długość najkrótszego prostego cyklu.

Dla danej graficznej prezentacji $\langle \Gamma \mid \Theta \rangle$ definiujemy związany z nią kompleks X w następujący sposób. *Zestożkowaną przestrzeń* otrzymujemy, doklejając do grafu Γ stożki nad grafami Θ_n za pomocą (etykietujących) odwzorowań $\Theta_n \to \Gamma$. Grupą fundamentalną tej przestrzeni jest G. Graf Cayleya prezentacji $\langle \Gamma \mid \Theta \rangle$ jest 1–szkieletem $X'^{(1)}$ uniwersalnego przykrycia X' przestrzeni zestożkowanej. Definiujemy odwzorowania $\varphi'_i \colon r_i \to X^{(1)}$ jako podniesienia odwzorowań $\Theta_n \to \Gamma$. W szczególności grafy r_i są kopiami grafów Θ_n dla różnych n. Ostatecznie definiujemy X jako iloraz kompleksu X', w którym identyfikujemy stożki doklejone przez $\varphi'_i \colon r_i \to X'^{(1)}$ oraz $\varphi'_j \colon r_j \to X'^{(1)}$, jeżeli istnieje izomorfizm grafów etykietowanych (przez etykietowanie indukowane przez $\Theta_n \to \Gamma$) $r_i \to r_j$ taki, że φ'_i faktoryzuje się jako $r_i \to r_j \xrightarrow{\varphi'_j} X'^{(1)}$. Odwzorowania $\varphi_i \colon r_i \to X$ są złożeniami odwzorowań φ'_i z ilorazowym odwzorowaniem $X' \to X$. Jeżeli kompleks X jest $C'(\lambda)$–kompleksem, to prezentację $\langle \Gamma \mid \Theta \rangle$ nazywamy *graficzną prezentacją małych skreśleń typu* $C'(\lambda)$.

Lemat 4.4.8 ([Oll06, Theorem 1] oraz [Gru15, 5.10])**.** *Dla grafu Cayleya $X^{(1)}$ graficznej prezentacji małych skreśleń typu $C'(1/6)$ odwzorowania $\varphi_i \colon r_i \to X^{(1)}$ są zanurzeniami izometrycznymi.*

4.5 Główne wyniki z prac [H1]–[H3]

4.5.1 Główne wyniki z pracy [H1]

Problem konstruowania wysokowymiarowych grup hiperbolicznych w sensie Gromowa był wielokrotnie podnoszony w przeszłości. Luźna hipoteza Gromowa [Gro93] (por. jej precyzyjną wersję na liście problemów Bestviny [Bes]) głosiła, że konstrukcja takich grup zawsze wymaga nietrywialnych narzędzi z teorii liczb (por. także dyskusję w [JSa03]). Ostatecznie Januszkiewicz–Świątkowski [JSa03] podali geometryczną konstrukcję hiperbolicznych w sensie Gromowa grup Coxetera w każdym wymiarze. Warto przy tym zauważyć, że wcześniej sądzono (por. hipotezę Moussonga [Mou88]), iż istnieje uniwersalne ograniczenie na wirtualny wymiar kohomologiczny dowolnej hiperbolicznej w sensie Gromowa grupy Coxetera (co było wspierane przez wynik Vinberga [Vin85]). Później pojawiło się kilka podobnych konstrukcji, zob. [Hag, JSa06, ABJ+09]. Wszystkie one wykorzystują dość zaawansowaną aparaturę teorii kompleksów grup, a ponadto otrzymywane w ten sposób grupy są zawsze *systoliczne*, to znaczy działają geometrycznie na kompleksach systolicznych — por. Rozdział 4.4.1. Jak pokazali Januszkiewicz–Świątkowski [JSa07] oraz ja sam [Osa07, Osa08], grupy systoliczne spełniają bardzo restrykcyjne własności asferyczności, które sprawiają, że są one w pewnym sensie asymptotycznie dwuwymiarowe. W szczególności nie „zawierają asymptotycznie" sfer o wymiarze co najmniej 2.

W artykule [H1] przedstawiam prostą geometryczną konstrukcję hiperbolicznych w sensie Gromowa grup Coxetera o dowolnie dużym wirtualnym wymiarze kohomologicznym. Jest to, według mojej wiedzy, najprostsza znana konstrukcja wysokowymiarowych grup hiperbolicznych. Metoda ta jest elementarna i wykorzystuje jedynie (w najprostszej wersji) podstawowe fakty o prostokątnych grupach Coxetera. Pozwoliła mi ona skonstruować wysoko wymiarowe hiperboliczne grupy Coxetera, które nie są systoliczne — mogą one zawierać sfery w nieskończoności. Są to pierwsze znane przykłady tego typu. Z drugiej strony ogólne ramy tej konstrukcji umożliwiły nam w [OSa15] uzyskanie nowych konstrukcji wysoko wymiarowych grup o różnych własnościach asferyczności. Praca ta opiera się na narzędziach i ideach związanych ze *słabo systolicznymi kompleksami* (ang. weakly sytolic complexes), wprowadzonymi i rozwiniętymi przeze mnie w [Osa13] (por. także [CO15]).

Konstrukcja przebiega następująco. Aby skonstruować hiperboliczną w sensie Gromowa prostokątną grupę Coxetera, wystarczy znaleźć skończony 5–duży (tj. flagowy bez kwadratów) kompleks symplicjalny — por. Twierdzenia 4.4.2. Takie kompleksy symplicjalne konstruujemy indukcyjnie, przy czym ich globalny wymiar kohomologiczny rośnie na każdym kroku. Krok indukcyjny dzieli się na następujące trzy etapy.

Konstrukcja podstawowa.

Krok 1. Niech X będzie skończonym 5–dużym (tj. flagowym bez kwadratów) kompleksem symplicjalnym takim, że $H^n(X;\mathbb{Q}) \neq 0$. Niech (W,S) będzie układem Coxetera, którego nerwem jest X, tzn. $X = L(W,S)$. Wówczas wirtualny wymiar kohomologiczny grupy W spełnia $\operatorname{vcd} W \geq n+1$; por. Rozdział 4.4.4. Kompleks X jest linkiem każdego wierzchołka kompleksu Davisa $\Sigma = \Sigma(W,S)$ odpowiadającego (W,S).

Krok 2. Wybieramy beztorsyjną podgrupę H grupy W o dostatecznie dużym skończonym indeksie. Wówczas $Y = \Sigma/H$ jest lokalnie 5–dużym kompleksem kostkowym (tj. z linkami będącymi flagowymi kompleksami bez kwadratów) oraz zachodzi $H^{n+1}(Y;\mathbb{Q}) \neq 0$.

Krok 3. Niech $X' = Th(Y)$ będzie symplicjalnym pogrubieniem kompleksu Y; por. Rozdział 4.4.5. Wówczas X' jest skończonym 5–dużym kompleksem symplicjalnym oraz mamy

$H^{n+1}(X';\mathbb{Q}) \neq 0$.

Na tym kończy się krok indukcyjny. Skonstruowany kompleks X' może teraz posłużyć jako kompleks początkowy X w Kroku 1. Kluczowym faktem, który sprawia, że powyższa konstrukcja działa, a zarazem głównym wynikiem pracy [H1], jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.5.1 ([H1, Main Theorem])**.** *Niech X będzie skończonym 5–dużym kompleksem symplicjalnym takim, że $H^n(X;\mathbb{Q}) \neq 0$. Wówczas istnieje beztorsyjna podgrupa H grupy W o skończonym indeksie taka, że kompleks X' otrzymany w powyższej konstrukcji podstawowej jest skończonym 5–dużym kompleksem symplicjalnym oraz $H^{n+1}(X';\mathbb{Q}) \neq 0$. W szczególności prostokątna grupa Coxetera o nerwie X' jest hiperboliczna w sensie Gromowa i ma wirtualny wymiar kohomologiczny co najmniej $n + 2$.*

Zaczynając od skończonego 5–dużego n_0–wymiarowego kompleksu symplicjalnego X_0, po wykonaniu k razy Kroków 1–3 otrzymujemy skończony 5–duży kompleks symplicjalny X taki, że $H^{n_0+k}(X;\mathbb{Q}) \neq 0$. W konsekwencji prostokątna grupa Coxetera o nerwie X jest hiperboliczna w sensie Gromowa i ma wirtualny wymiar kohomologiczny co najmniej $n_0 + k + 1$.

Główna idea stojąca za tą konstrukcją polega na tym, że skończony iloraz X „n–wymiarowego” kompleksu (kompleksu Davisa) wykorzystuje się jako link wierzchołków w nowym kompleksie (nowym kompleksie Davisa). W ten sposób „wymiar” nowego kompleksu skacze co najmniej o 1 (ponieważ nowy kompleks jest sumą stożków nad swoimi linkami), a następnie procedurę tę powtarza się indukcyjnie.

Moja konstrukcja dostarcza przykładów wysoko wymiarowych hiperbolicznych w sensie Gromowa grup Coxetera, które są bardzo (tj. asymptotycznie) różne od wcześniej konstruowanych. Wszystkie wcześniej znane przykłady z [JSa03, JSa06, Hag, ABJ+09] były systoliczne. Grupy systoliczne są w pewnym sensie dwuwymiarowe — „nie zawierają asymptotycznie” sfer o wymiarze większym niż 1; por. [JSa07, Osa07, Osa08, OSa15]. Moja technika pozwala natomiast konstruować przykłady niesystoliczne — „zawierające” sfery aż do wymiaru 3.

Stwierdzenie 4.5.2 ([H1, Proposition 5.1])**.** *Niech Z będzie pełnym podkompleksem skończonego 5–dużego kompleksu symplicjalnego X_0. Niech X będzie skończonym 5–dużym kompleksem symplicjalnym otrzymanym w konstrukcji podstawowej startując od X_0, a (W, S) — odpowiadającym mu układem Coxetera (tj. $X = L(W, S)$). Wówczas prostokątna grupa Coxetera W' o nerwie Z (tj. $Z = L(W', S')$) jest podgrupą grupy W.*

Do odróżniania niektórych z tych grup od grup systolicznych używam pojęcia *asymptotycznej dziedzicznej asferyczności* (ang. *asymptotic hereditary asphericity*, w skrócie *AHA*), którego tutaj nie definiuję — por. [JSa07, OSa15]. Własność AHA jest formalnym sposobem wyrażenia faktu, że grupa „nie zawiera asymptotycznie” sfer. Następujący wniosek wynika ze Stwierdzenia 4.5.2 oraz z faktu, że podgrupy grup systolicznych są AHA [JSa07].

Wniosek 4.5.3 ([H1, Corollary 5.2]). *Jeżeli X_0 jest nerwem grupy W', która nie jest asymptotycznie dziedzicznie asferyczna, to grupa W otrzymana w konstrukcji podstawowej nie jest systoliczna.*

Przykłady. Poniżej pokazuję, w jaki sposób moja konstrukcja prowadzi do przykładów niesystolicznych. Niech X_0 będzie nerwem prostokątnej grupy Coxetera W' działającej geometrycznie na k–wymiarowej rzeczywistej przestrzeni hiperbolicznej $\mathbb{H}^k$ (takie grupy istnieją tylko dla $k = 1, 2, 3, 4$; por. [Vin85]). Jeżeli $k \geq 3$, to grupa W' nie jest AHA (por. [JSa07, Osa07, OSa15]), a zatem również grupa W (otrzymana w konstrukcji) nie jest AHA, a w szczególności nie jest systoliczna; por. [JSa07, OSa15].

Nie wiadomo, czy hiperboliczna w sensie Gromowa prostokątna grupa Coxetera może „zawierać asymptotycznie" sfery o wymiarze większym niż 3. Pewna forma hipotezy Januszkiewicza–Świątkowskiego głosi, że brzeg Gromowa jednospójnego lokalnie 5–dużego kompleksu kostkowego (tj. CAT(-1) kompleksu kostkowego) nie może zawierać sfer o wymiarze większym niż 3. Ponieważ hiperboliczne prostokątne grupy Coxetera działają geometrycznie na takich kompleksach kostkowych (swoich kompleksach Davisa), hipoteza ta implikuje, że ich brzegi nie mogą zawierać sfer o wysokim wymiarze.

W przeciwieństwie do powyższych wyników moja konstrukcja implikuje również następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 4.5.4 ([H1, Proposition 6.1]). *Niech $k \geq 6$ oraz niech X będzie skończonym 5–dużym kompleksem symplicjalnym otrzymanym w konstrukcji podstawowej. Załóżmy, że spełnione są następujące warunki:*

1) kompleks początkowy X_0 jest k–duży;

2) na każdym kroku konstrukcji podstawowej grupa H jest wybierana tak, aby minimalne przesunięcie działania H na $Th(\Sigma)^{(1)}$ było co najmniej k.

Wówczas otrzymany kompleks X jest k–duży, a w konsekwencji grupa Coxetera W o nerwie X jest k–systoliczna.

Ponadto inne warianty konstrukcji podstawowej są wykorzystywane w [OSa15] do uzyskania nowych konstrukcji grup o różnych własnościach asferyczności spełnianych przez grupy systoliczne; por. [JSa07, Osa07, Osa08]. Opiera się to na pojęciu *słabo systolicznych grup*, wprowadzonym przeze mnie w [Osa13].

Istnieje wiele wariantów konstrukcji podstawowej, odpowiadających wyborowi kompleksu Z pełniącego rolę Σ w Kroku 1 konstrukcji, dla ustalonego kompleksu X. Poniżej opisuję dwa z nich.

Dla danego X, W oraz Σ jak w Kroku 1 konstrukcji podstawowej, niech Z będzie regularnym prostokątnym budynkiem związanym z grupą W. Prosta konstrukcja takich budynków została opisana w [DO07]. Pokazano tam również (odtwarzając znane fakty w nowy sposób), że grupy izometrii takich budynków posiadają rezydualnie skończone jednorodne kraty. W [Osa13] wykazano, że dla dowolnego takiego budynku istnieje lokalnie 5–duży kompleks symplicjalny $Th(Z)$, będący analogiem pogrubienia kompleksu kostkowego opisanego w Rozdziale 4.4.5: sympleksy $Th(Z)$ odpowiadają sferycznym residuom w Z. Wówczas dla odpowiednio dobranej grupy H, będącej kratą w $\mathrm{Isom}(Z)$, iloraz $H\backslash Th(Z)$ jest skończonym 5–dużym kompleksem symplicjalnym z $H^{n+1}(H\backslash Th(Z)) \neq 0$ (ponieważ Z zawiera kopie Σ), co pozwala kontynuować indukcję.

Dla danej hiperbolicznej w sensie Gromowa prostokątnej grupy Coxetera W o prezentacji $W = \langle S \mid (st)^{m_{st}} \rangle$ można skonstruować nieprostokątną grupę Coxetera $W^f = \langle S \mid (st)^{m^f_{st}} \rangle$ w następujący sposób. Jeżeli $m_{st} \neq \infty$, to $m^f_{st} = m_{st}$, natomiast w przeciwnym przypadku m^f_{st} jest dowolną liczbą większą niż 4 lub równe ∞. W [JSa03] dowiedziono, że wówczas grupa W^f jest hiperboliczna w sensie Gromowa oraz że $\mathrm{vcd}(W^f) = \mathrm{vcd}(W)$, o ile $\mathrm{vcd}(W) \geq 2$.

4.5.2 Główne wyniki z pracy [H2]

Początkową motywacją do napisania artykułu [H2] było następujące, dobrze znane pytanie:

Czy wszystkie grupy Burnside'a mają własność (T) Kazhdana?

(Por. np. [Obe, Open Problem 17, s. 9], książkę [BdlHV08, Open Example 7.3, s. 282], a także [Sha06, s. 1304] oraz [Sha, Conjecture]. W dwóch ostatnich pracach Y. Shalom formułuje to pytanie jako hipotezę i podaje jej motywację.)

Przypomnijmy, że nieskończone *grupy Burnside'a*, to znaczy skończenie generowane grupy o ograniczonej torsji, zostały po raz pierwszy skonstruowane przez Nowikowa–Adiana [NA68]. *Wolna grupa Burnside'a* $B(m,n)$ dana jest prezentacją

$$\langle s_1, s_2, \ldots, s_m \mid w(s_1, s_2, \ldots, s_m)^n \rangle,$$

gdzie w przebiega wszystkie słowa w generatorach $s_1, s_2, \ldots, s_m$. Na powyższe pytanie odpowiadam przecząco, dowodząc następującego twierdzenia.

Twierdzenie 4.5.5 ([H2, Theorem 1])**.** *Jeżeli wolna grupa Burnside'a $B(m,n)$ jest nieskończona, to dla każdej liczby całkowitej $k > 1$ wolna grupa Burnside'a $B(m,kn)$ działa bez punktów stałych na CAT(0) kompleksie kostkowym, a w szczególności nie ma własności (T) Kazhdana.*

Jako główne narzędzie w pracy [H2] wprowadzam ogólną procedurę zwaną *kubizacją grupy* (ang. *group cubization*). Jest to prosty, sam w sobie interesujący trik, który — jak sądzę — może mieć szerokie zastosowania. Działa on następująco.

Niech G będzie grupą skończenie generowaną, a $\widetilde{\Gamma}$ — $\mathbb{Z}_k$–homologicznym nakryciem grafu Cayleya Γ grupy G (por. poniżej), gdzie $\mathbb{Z}_k = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ jest grupą liczb całkowitych modulo k. Graf przykrywający $\widetilde{\Gamma}$ wyposażony jest w strukturę przestrzeni ze ścianami, zadaną przez przeciwobrazy krawędzi grafu Γ. Dowodzę następującego twierdzenia.

Twierdzenie 4.5.6 ([H2, Theorem 2])**.** *Dla skończenie generowanej grupy G i jej grafu Cayleya Γ, $\mathbb{Z}_k$–homologiczne nakrycie $\widetilde{\Gamma}$ grafu Γ jest grafem Cayleya pewnej skończenie generowanej grupy $\widetilde{G}$. Jeżeli G jest nieskończona, to $\widetilde{G}$ działa z nieograniczonymi orbitami na CAT(0) kompleksie kostkowym.*

Grupę $\widetilde{G}$ nazywamy *kubizacją* grupy G. Twierdzenie 4.5.5 wynika w prosty sposób z Twierdzenia 4.5.6, ponieważ kubizacja $\widetilde{G}$ grupy Burnside'a G jest ponownie grupą Burnside'a (o wykładniku pomnożonym przez k).

Poniżej przedstawiam więcej szczegółów dotyczących tej konstrukcji. Wyniki te wykorzystują jedynie kilka podstawowych faktów z teorii nakryć; klasycznym źródłem jest na przykład książka [Hat02].

Niech $\Gamma = \mathrm{Cay}(G, S)$ będzie grafem Cayleya grupy G generowanej przez skończony symetryczny zbiór generatorów S (tj. $S = S^{-1}$). Przyjmujemy konwencję, że każdy wierzchołek należy do dwóch krawędzi odpowiadających parze $\{s, s^{-1}\}$ dla każdego $s \in S$. W szczególności generatory będące involucjami dają podwójne krawędzie, a stopień każdego wierzchołka wynosi $|S|$. Ustalmy liczbę całkowitą $k > 1$. Niech $p\colon \widetilde{\Gamma} \to \Gamma$ będzie *$\mathbb{Z}_k$–homologicznym nakryciem* grafu Γ, to znaczy nakryciem odpowiadającym jądru K naturalnego homomorfizmu

$$\pi_1(\Gamma, 1) \to H_1(\Gamma; \mathbb{Z}_k) = \bigoplus_I \mathbb{Z}_k,$$

gdzie I jest zbiorem indeksującym generatory $\pi_1(\Gamma, 1)$, zaś 1 oznacza wierzchołek Γ odpowiadający elementowi neutralnemu grupy G. Zauważmy, że jest to nakrycie charakterystyczne, to znaczy K jest charakterystyczną podgrupą $\pi_1(\Gamma, 1)$. Podgrupę tę można utożsamić z $\pi_1(\widetilde{\Gamma}, \widetilde{1})$, gdzie $\widetilde{1}$ jest wierzchołkiem takim, że $p(\widetilde{1}) = 1$. W konsekwencji dla każdego automorfizmu g grafu Γ zachodzi

$$g_* \circ p_*(\pi_1(\widetilde{\Gamma}, \widetilde{1})) = p_*(\pi_1(\widetilde{\Gamma}, \widetilde{1})),$$

a zatem złożenie $g \circ p\colon \widetilde{\Gamma} \to \Gamma$ można podnieść do odwzorowania $\widetilde{g}\colon \widetilde{\Gamma} \to \widetilde{\Gamma}$ spełniającego $p \circ \widetilde{g} = g \circ p$.

Każdy element $g \in G$ wyznacza automorfizm grafu Γ dany przez mnożenie z lewej strony przez g (również oznaczany przez g). Niech $\widetilde{G}$ oznacza zbiór wszystkich podniesień wszystkich takich automorfizmów.

Twierdzenie 4.5.7 ([H2, Theorem 3]). *Zbiór $\widetilde{G}$ tworzy grupę generowaną przez zbiór $\widetilde{S}$ o mocy $|\widetilde{S}| = |S|$, przy czym $\widetilde{\Gamma}$ jest jej grafem Cayleya $\mathrm{Cay}(\widetilde{G}, \widetilde{S})$.*

Definicja 4.5.8. Grupę $\widetilde{G}$ nazywamy *kubizacją* grupy G względem jej grafu Cayleya $\Gamma = \mathrm{Cay}(G, S)$.

Wybierzmy wierzchołek $\widetilde{1} \in \widetilde{\Gamma}$ taki, że $p(\widetilde{1}) = 1 \in \Gamma$. Dla każdego $s \in S$ możemy wybrać jego podniesienie $\widetilde{s}$ w taki sposób, aby $\widetilde{s}(\widetilde{1})$ było wierzchołkiem sąsiadującym z $\widetilde{1}$. Zbiór $\widetilde{S} = \{\widetilde{s} \mid s \in S\}$ jest wówczas zbiorem generatorów grupy $\widetilde{G}$ i będzie wykorzystywany dalej.

Lemat 4.5.9 ([H2, Lemma 4]). *Niech $g_1, \ldots, g_n \in G$ będą takimi elementami, że $g_1 g_2 \cdots g_n =_G 1$. Dla $i = 1, \ldots, n$ niech $\widetilde{g}_i$ będzie podniesieniem elementu g_i. Wówczas $(\widetilde{g}_1 \cdots \widetilde{g}_n)^k = \mathrm{id}_{\widetilde{\Gamma}}$.*

Korzystając z powyższych faktów, dowody Twierdzeń 4.5.7 oraz 4.5.5 są dość proste, dlatego przedstawiam je poniżej.

Dowód Twierdzenia 4.5.6. Na mocy Twierdzenia 4.5.7 graf $\widetilde{\Gamma}$ jest grafem Cayleya $\mathrm{Cay}(\widetilde{G},\widetilde{S})$. Najpierw rozważmy przypadek, gdy żadna krawędź grafu Γ nie rozcina Γ. D. Wise [Wis, Section 9] oraz [Wis12, Section 10.3] zauważył, że zbiór wierzchołków $\mathbb{Z}_2$–homologicznego nakrycia grafu posiada naturalną strukturę przestrzeni ze ścianami. Analogiczna struktura istnieje dla $\mathbb{Z}_k$–homologicznego nakrycia (por. np. [Khu14, str. 57]): przeciwobraz każdej otwartej krawędzi grafu Γ rozcina przykrycie $\widetilde{\Gamma}$ na k spójnych składowych. Taki podział zbioru wierzchołków $\widetilde{\Gamma}$ wyznacza $2^{k-1}-1$ podziałów na dwa niepuste zbiory — są to ściany w przestrzeni ze ścianami $(\widetilde{\Gamma}^{(0)},\mathcal{W})$. Oczywiście grupa $\widetilde{G}$ działa na $(\widetilde{\Gamma}^{(0)},\mathcal{W})$: dla każdego generatora $\widetilde{s}\in\widetilde{S}$ ściana odpowiadająca krawędzi $e\in E$ jest przekształcana przez $\widetilde{s}$ na ścianę odpowiadającą krawędzi $s(e)$. Jasne jest, że działanie to ma orbity nieograniczone względem pseudometryki ścian.

W przypadku, gdy istnieje krawędź rozcinająca graf Γ, jej translacje przez G wyznaczają przestrzeń ze ścianami $(\Gamma^{(0)},\mathcal{W}')$. Działanie grupy G na $(\Gamma^{(0)},\mathcal{W}')$ ma orbity nieograniczone i indukuje działanie grupy $\widetilde{G}$ na $(\Gamma^{(0)},\mathcal{W}')$ o tej samej własności.

Na koniec, na mocy [Nic04, CN05a], wnioskujemy, że $\widetilde{G}$ działa z nieograniczonymi orbitami na odpowiadającym jej CAT(0) kompleksie kostkowym. $\square$

Dowód Twierdzenia 4.5.5. Niech $G=B(m,n)$ będzie nieskończoną wolną grupą Burnside'a. Niech Γ będzie jej grafem Cayleya względem (symetrycznego) zbioru generatorów S, gdzie $|S|=2m$. Z Twierdzenia 4.5.7 wynika, że kubizacja $\widetilde{G}$ grupy G względem Γ jest grupą o grafie Cayleya $\widetilde{\Gamma}=\mathrm{Cay}(\widetilde{G},\widetilde{S})$, będącym $\mathbb{Z}_k$–homologicznym nakryciem Γ, gdzie $\widetilde{S}=\{\widetilde{s}\mid s\in S\}$. Dla każdego słowa $w=\widetilde{s}_1\cdots\widetilde{s}_l$ mamy $(s_1\cdots s_l)^n={}_G1$, a zatem — na mocy Lematu 4.5.9 — $w^{kn}={}_{\widetilde{G}}1$. Wynika stąd, że kubizacja $\widetilde{G}$ jest grupą Burnside'a o wykładniku kn. Z Twierdzenia 4.5.6 otrzymujemy, że $\widetilde{G}$ działa z nieograniczonymi orbitami na CAT(0) kompleksie kostkowym. Ponieważ $\widetilde{G}$ jest ilorazem wolnej grupy Burnside'a $B(m,kn)$, również ta ostatnia dopuszcza analogiczne działanie. $\square$

Twierdzenie 4.5.6 może być użyte do wykazania istnienia działań z nieograniczonymi orbitami na CAT(0) kompleksach kostkowych dla innych klas grup. W szczególności otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 4.5.10 ([H2, Corollary 1])**.** *Jeżeli grupa zadana prezentacją $\langle S\mid r_1,r_2,\ldots\rangle$ jest nieskończona, to grupa o prezentacji $\langle S\mid r_1^k,r_2^k,\ldots\rangle$ działa z nieograniczonymi orbitami na CAT(0) kompleksie kostkowym.*

Wynik ten stosuje się do klas grup zadanych prezentacjami, w których relatory są właściwymi potęgami. Należy tu wiele ważnych klasycznych przykładów: uogólnione grupy trójkątowe, uogólnione grupy von Dycka, grupy zadane prezentacjami Coxetera typów $(l,m\,|\,n,k)$, $(l,m,n;q)$ oraz $G^{m,n,p}$ (por. np. [Tho95] i literaturę tam cytowaną), a także różne grupy małych skreśleń (por. np. [Wis, Wis12] i literaturę tam zawartą).

Uwaga. W dodatku *A comment on Osajda's "Group cubization" paper* do pracy [H2] Mikaël Pichot przedstawia alternatywny dowód pewnej wersji Twierdzenia 4.5.5. Dowód ten jest jednak mniej ogólny (nie obejmuje przypadku grup generowanych przez dwa elementy, tj. $B(2,n)$) i opiera się na wcześniejszych nietrywialnych wynikach dotyczących produktów wiankowych grup [CMV04, Neu05] (podczas gdy moje metody są bardzo elementarne). Ponadto istotnym aspektem mojej pracy jest samo wprowadzenie techniki kubizacji — por. także Rozdział 4.6.1 poniżej.

4.5.3 Główne wyniki z pracy [H3]

Głównym celem artykułu [H3] jest przedstawienie techniki konstruowania skończenie generowanych grup, w których grafy Cayleya zadane (nieskończone) grafy zanurzają się izometrycznie. Pozwala to otrzymywać grupy posiadające własności w pewnym sensie odzwierciedlające własności tych tych ostatnich grafów. W szczególności konstruuję grupy bez własności A Guolianga Yu, które są zgrubnie zanurzalne w przestrzeń Hilberta (por. niżej), oraz grupy, w których grafy Cayleya pewne ekspandery zanurzają się izometrycznie. Te ostatnie grupy nie są zatem zgrubnie zanurzalne w przestrzeń Hilberta i dla nich zawodzą różne wersje hipotezy Bauma–Connesa. Ogólnym narzędziem, z którego korzystam, jest teoria graficznych małych skreśleń; por. Rozdział 4.4.7. Głównym problemem technicznym jest wówczas znalezienie odpowiednich etykietowań małych skreśleń dla rozważanych grafów.

Etykietowania małych skreśleń pewnych grafów

Etykietowanie grafu można rozumieć jako przypisanie etykiet skierowanym krawędziom lub równoważnie jako odwzorowanie w bukiet — por. Rozdział 4.4.7. Etykietowanie spełnia pewien warunek małych skreśleń, gdy etykietowanie długiej ścieżki (długiej w porównaniu z popręgiem grafu) nie pojawia się w dwóch różnych miejscach; por. Rozdział 4.4.7. W naszych zastosowaniach interesuje nas skończony zbiór etykiet oraz grafy będące nieskończonymi rozłącznymi sumami grafów skończonych o stopniu jednostajnie ograniczonym. Przykładami są ciągi skończonych grafów D–regularnych dla ustalonego $D > 2$. Dla takich grafów jedynym znanym dotychczas etykietowaniem typu „małe skreślenia” było słynne etykietowanie Gromowa pewnych ekspanderów [Gro03] (por. omówienia tej konstrukcji w [AD08, Cou14]). Etykietowanie Gromowa jest w pewnym sensie losowe (generyczne) i jako takie nie spełnia warunku małych skreśleń, z którego korzystamy. W konsekwencji etykietowanie to daje jedynie słabe zanurzenie w sensie [Ost13, Definition 7.2], a nie zanurzenie zgrubne grafów (relatorów) w odpowiadającą im grupę. Przypomnijmy, że odwzorowanie $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ między przestrzeniami metrycznymi jest *zanurzeniem zgrubnym*, jeżeli $d_Y(f(x_n), f(y_n)) \to \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $d_X(x_n, y_n) \to \infty$ dla dowolnych ciągów (x_n), (y_n).

W pracy rozważam ciągi $\Theta = (\Theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rozłącznych skończonych grafów spójnych o stopniu ograniczonym przez $D > 0$. Ponadto zachodzi $\operatorname{girth}\Theta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ oraz ciąg Θ spełnia warunek

$$\operatorname{diam}\Theta_n \leqslant A \operatorname{girth}\Theta_n, \tag{4.2}$$

gdzie diam oznacza średnicę, girth popręg, czyli długość najkrótszego cyklu prostego, a A jest stałą uniwersalną (niezależną od n). Ustalamy *stałą małych skreśleń* $\lambda \in (0, 1/6]$ oraz zakładamy, że $1 < \lfloor \lambda \operatorname{girth}\Theta_n \rfloor < \lfloor \lambda \operatorname{girth}\Theta_{n+1} \rfloor$.

Najciekawsze przypadki zachodzą dla $D > 2$. Takie ciągi istnieją: przykładem są *grafy Ramanujana* z [Mar88, LPS88]. Są to przykłady *ekspanderów* (grafów); por. [Ms97].

Głównym wynikiem technicznym pracy [H3], jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.5.11 ([H3, Theorem 1]). *Dla każdego $\lambda > 0$ istnieje etykietowanie małych skreśleń typu $C'(\lambda)$ ciągu $(\Theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nad skończonym zbiorem etykiet.*

Jest dobrze znane (por. np. [Gro03, Oll06]), że spełnienie tak silnego warunku małych skreśleń implikuje, iż w konstruowanych grupach grafy Θ_n zanurzają się izometrycznie w grafy Cayleya; por. Lemat 4.4.8.

Twierdzenie 4.5.12 ([H3, Theorem 3.2]). *Niech G będzie grupą zadaną graficzną prezentacją $\langle \Gamma \mid \Theta \rangle$, gdzie lokalne izometrie $\Theta_n \to \Gamma$ są wyznaczone przez etykietowania m_n. Wówczas każdy graf Θ_n zanurza się izometrycznie w graf Cayleya grupy G danej prezentacją $\langle \Gamma \mid \Theta \rangle$.*

Do konstruowania wymaganych etykietowań wykorzystuję techniki kombinatoryczne (kolorowania grafów) [AGHuR02] oparte na Lemacie lokalnym Lovásza; por. Rozdział 4.4.6. Warto podkreślić, że choć rdzeń metody ma charakter probabilistyczny (podobnie jak w technikach Gromowa), to istnieje zasadnicza różnica: szukam dowolnego etykietowania spełniającego wymagane własności, podczas gdy w podejściu Gromowa analizuje się własności etykietowania losowego. Różnica ta jest kluczowa dla uzyskania silniejszych własności, o których była mowa powyżej.

Narzędzia używane w obu podejściach są różne, a przedstawiony argument jest również relatywnie krótki (s. 5–14 pracy) w porównaniu z argumentem Gromowa zaprezentowanym w [AD08].

Poniżej opisuję konkretne zastosowania skonstruowanych etykietowań małych skreśleń. Ponadto sama konstrukcja oraz ogólna technika kombinatoryczna rozwinięta w tej pracy stanowią istotne narzędzia, które znalazły liczne dalsze zastosowania; por. Rozdział 4.6.3.

Grupy z ekspanderami w grafach Cayleya

Wykorzystując swoje etykietowanie ekspanderów, Gromov skonstruował skończenie generowaną grupę, dla której istnieje słabe zanurzenie ekspandera w sensie [Ost13, Definition 7.2] [Gro03]. Słabe zanurzenie nie musi być zanurzeniem zgrubnym i w konstrukcji Gromowa nie można uzyskać tego drugiego. Posiadanie słabo zanurzonych ekspanderów wystarcza, aby stwierdzić, że grupa nie jest zgrubnie zanurzalna w przestrzeń Hilberta [Gro03] lub że zawodzi dla niej hipoteza Bauma–Connesa ze współczynnikami [HLS02] (por. nasze Wnioski 4.5.14 i 4.5.15). Jednak w wielu innych sytuacjach wydaje się konieczne posiadanie rzeczywistego zanurzenia zgrubnego ekspandera, aby uzyskać pożądane własności; por. np. [WY12]. Moje etykietowania pozwalają dostarczyć grup o takiej własności, a nawet o silniejszych, co pokazuje następujący wynik.

Twierdzenie 4.5.13 ([H3, Theorem 4]). *Istnieją skończenie generowane grupy, w których grafy Cayleya ekspandery zanurzają się izometrycznie.*

Istnienie takich przykładów jest kluczowe dla pewnych analiz zawodzenia hipotezy Bauma–Connesa ze współczynnikami, jak w [WY12, Theorem 8.3] (por. Wniosek 4.5.15) czy w [BGW16, Section 7]. Poza monstrami Gromowa (oraz grupami pochodnymi) moje przykłady są jedynymi znanymi obecnie skończenie generowanymi kontrprzykładami do hipotezy Bauma–Connesa ze współczynnikami oraz jedynymi znanymi skończenie generowanymi grupami niezanurzalnymi zgrubnie w przestrzeń Hilberta.

Jako bezpośrednią konsekwencję Twierdzenia 4.5.13 oraz wyniku Sapira [Sap14] otrzymujemy istnienie zamkniętych rozmaitości asferycznych, których grupy podstawowe zawierają zgrubnie zanurzone ekspandery; por. Wniosek 4.5.16. Są to pierwsze przykłady tego typu.

Zauważmy, że w pewnych sytuacjach konieczne może być rzeczywiste izometryczne zanurzenie zadanych grafów w grupach — dzieje się tak na przykład w naszej konstrukcji grup PW bez własności A, przedstawionej w następnej podsekcji, gdzie jest to potrzebne do subtelnej konstrukcji ścian. Sądzimy, że własność ta może być kluczowa również dla dalszych zastosowań. Ponadto izometryczne zanurzenie jest istotne w [H4] oraz w kolejnych pracach; por. Rozdział 4.6.3.

Ekspandery nie dopuszczają zanurzeń zgrubnych w przestrzenie Hilberta [Ms97]. Z [HLS02, Section 7] wynika, że grupy zawierające zgrubnie zanurzone ekspandery nie spełniają hipotezy Bauma–Connesa ze współczynnikami. Następujący wniosek jest bezpośrednią konsekwencją powyższych wyników oraz Twierdzenia 4.5.12.

Wniosek 4.5.14 ([H3, Corollary 3.3])**.** *Jeżeli Θ jest ekspandującym ciągiem grafów, to grupa $\langle \Gamma \mid \Theta \rangle$ nie jest zgrubnie zanurzalna w przestrzeń Hilberta i nie spełnia hipotezy Bauma–Connesa ze współczynnikami.*

Następny wynik został udowodniony w [WY12] dla grup zawierających zgrubnie zanurzone ekspandery. Jak wyjaśniono wyżej, dla grup Gromowa mamy jedynie słabe zanurzenie. Moja konstrukcja dostarcza zatem pierwszych przykładów grup, dla których zachodzi wniosek następującego twierdzenia.

Wniosek 4.5.15 ([WY12, Corollary 1.7])**.** *Niech G będzie grupą zadaną graficzną prezentacją $\langle \Gamma \mid \Theta \rangle$, gdzie lokalne izometrie $\Theta_n \to \Gamma$ są wyznaczone przez etykietowania m_n, a Θ jest ciągiem grafów ekspandujących o rosnącym obwodzie. Niech X będzie obrazem izometrycznego zanurzenia Θ w graf Cayleya Y grupy G. Dla $n \in \mathbb{N}$ niech $X_n = \{y \in Y \mid d_Y(y, X) \leqslant n\}$, $A_n = l^\infty(X_n, \mathcal{K})$ oraz $A = \lim_{n\to\infty} l^\infty(X_n, \mathcal{K})$, gdzie $\mathcal{K}$ jest algebrą operatorów zwartych na ustalonej nieskończenie wymiarowej separowalnej przestrzeni Hilberta. Wówczas prawe działanie grupy G na Y nadaje A strukturę G–C^*–algebry i:*

1. *odwzorowanie (assembly map) Bauma–Connesa dla G ze współczynnikami w A jest iniektywna;*

2. *odwzorowanie (assembly map) Bauma–Connesa dla G ze współczynnikami w A nie jest surjektywna;*

3. *maksymalne odwzorowanie Bauma–Connesa (maximal Baum-Connes assembly map) dla G ze współczynnikami w A jest izomorfizmem.*

Podobnie, istnienie grup zawierających zgrubnie zanurzone ekspandery jest kluczowe dla wyników z [BGW16, Section 7].

Sapir [Sap14] opracował technikę zanurzania grup o kombinatorycznie asferycznych rekurencyjnych kompleksach prezentacyjnych w grupy o skończonych kombinatorycznie asferycznych kompleksach prezentacyjnych. Prezentacja dana etykietowaniem (Θ, m) z Twierdzenia 4.5.12 jest asferyczna; por. np. [Oll06]. Jest ona również rekurencyjna — etykietowanie (Θ, m) można znaleźć algorytmem "brute force". Zanurzając grupę $\langle \Gamma \mid \Theta \rangle$ z Wniosku 4.5.14 w grupę skończenie prezentowaną, otrzymujemy pierwsze przykłady takich grup zgrubnie zawierających ekspandery. W konsekwencji, wykorzystując techniki Sapira oraz Twierdzenie 4.5.12, otrzymujemy pierwsze przykłady następujących rozmaitości.

Wniosek 4.5.16 ([H3, Corollary 3.5])**.** *Istnieją domknięte rozmaitości asferyczne o wymiarze 4 i większym, których grupy podstawowe zawierają zgrubnie zanurzone ekspandery.*

Grupy niedokładne z własnością Haagerupa

Własność A, czyli *zgrubna średniowalność*, została wprowadzona przez Guolianga Yu [Yu00] w kontekście badań nad hipotezą Bauma–Connesa. Jednorodnie dyskretna przestrzeń metryczna (X, d) ma *własność A*, jeżeli dla każdego $\epsilon > 0$ oraz $R > 0$ istnieje rodzina skończonych zbiorów $\{A_x\}_{x \in X}$, gdzie $A_x \subseteq X \times \mathbb{N}$, oraz stała $S > 0$ takie, że:

1. $\frac{|A_x \triangle A_y|}{|A_x \cap A_y|} \leqslant \epsilon$ dla $d(x, y) \leqslant R$;

2. $A_x \subseteq B(x, S) \times \mathbb{N}$.

Skończenie generowana grupa ma własność A, jeżeli jest zgrubnie średniowalna dla metryki słów względem pewnego skończonego zbioru generatorów.

Własność A można traktować jako słabą (nieekwiwariantną) wersję średniowalności i — podobnie jak ona — ma ona wiele równoważnych sformułowań oraz liczne istotne zastosowania; por. np. [Wil09, NY12]. Dla przeliczalnych dyskretnych grup własność A jest równoważna: istnieniu topologicznie średniowalnego działania na zwartej przestrzeni Hausdorffa [HR00], dokładności zredukowanej C^*-algebry [GK02, Oza00], własności "nuclearity" jednorodnej algebry Roe [Roe03], oraz kilku innym własnościom geometrycznym i analitycznym; por. np. [NY12, s. 81–82].

Własność A implikuje zgrubną zanurzalność w przestrzeń Hilberta [Yu00]. Analogicznie, średniowalność implikuje własność Haagerupa (tj. a–T–średniowalność w sensie Gromowa). Poniższy diagram przedstawia relacje (strzałki oznaczają implikacje) pomiędzy tymi własnościami dla grup; por. np. [NY12, s. 124]. Zauważmy, że pojęcia po prawej stronie można traktować jako nieekwiwariantne odpowiedniki pojęć po lewej stronie.

$$\begin{tikzcd}
\text{średniowalność} \arrow[r] \arrow[d] & \text{własność A} \arrow[d] \\
\text{własność Haagerupa} \arrow[r] & \text{zgrubna zanurzalność w } l_2
\end{tikzcd}$$

W świetle powyższego pojawiło się naturalne pytanie, które przed pracą [H3] pozostawało otwarte: *czy grupy zgrubnie zanurzalne w przestrzeń Hilberta mają własność A?* — por. np. [AD02, Remark 3.8(2)], [HG04, Problem 3.4], [GK04, s. 257 i 261], [Nib, s. 6], [AD08, s. 27], [Wil09, s. 251] czy [NY12, Open Question 5.3.3]. Próby odpowiedzi na to pytanie (prównież pozytywnej) przyciągnęły znaczną uwagę badaczy i zapoczątkowały wiele nowych idei. Dowodzę twierdzenia silniejszego.

Twierdzenie 4.5.17 ([H3, Theorem 2])**.** *Istnieją skończenie generowane grupy działające właściwie na CAT(0) kompleksach kostkowych i nieposiadające własności A.*

Działanie właściwe na CAT(0) kompleksie kostkowym jest równoważne działaniu właściwemu na przestrzeni ze ścianami [HP98, Nic04, CN05b], czyli posiadaniu własności PW (w terminologii [Cor15]). Implikuje to w szczególności własność Haagerupa, a zatem ekwiwariantną zgrubną zanurzalność w przestrzeń Hilberta. Twierdzenie 4.5.17 pokazuje, że powyższy diagram jest zupełny — nie zachodzą między tymi własnościami żadne inne implikacje; por. [NY12, s. 124]. Poza monstrami Gromowa [Gro03], grupy skonstruowane w [H3] są w istocie jedynymi znanymi obecnie skończenie generowanymi grupami bez własności A; por. np. [Now07], [Nib, s. 6], [AD08, s. 28], [Wil09, s. 251 oraz Section 7.5] czy [NY12, Open Question 4.5.4] dla uwag i pytań pokrewnych.

Zauważmy, że brak własności A był przez niektórych badaczy uważany za istotną przeszkodę dla spełnienia różnych wersji hipotezy Bauma–Connesa. Kwestię tę wyjaśnia Twierdzenie 4.5.17: istnieją grupy bez własności A, które posiadają własność Haagerupa. Dla takich grup silna hipoteza Bauma–Connesa jest spełniona [HK01].

Zgrubnie nieśredniowalne grupy zanurzalne w przestrzeń Hilberta skonstruowane w [H3] są zadane przez nieskończone graficzne prezentacje małych skreśleń; por. Rozdział 4.4.7. Nieskończona rodzina grafów będących relatorami składa się z pewnych nakryć grafów regularnych o obwodach rosnących do nieskończoności. Relatory są grafami ze ścianami, a zatem istnieje system ścian również dla samej grupy. W konsekwencji grupa działa na przestrzeni ze ścianami. Działanie to jest właściwe, jeżeli spełnione są dodatkowe warunki. Badam taki warunek — *właściwy warunek rzadkiego uściennienia* (*proper lacunary walling condition*), który stanowi teorię interesującą samą w sobie. W szczególności otrzymuję następujący wynik.

Twierdzenie 4.5.18 ([H3, Theorem 3])**.** *Jeżeli kompleks X spełnia właściwy warunek rzadkiego uściennienia, to pseudometryka ścian jest właściwa. W konsekwencji grupa działająca właściwie na X działa właściwie na CAT(0) kompleksie kostkowym.*

Grupa jak w Twierdzeniu 4.5.18 jest konstruowana w taki sposób, że właściwy warunek rzadkiego uściennienia jest spełniony dla przestrzeni, na której grupa działa właściwie. W konsekwencji grupa ta działa właściwie na CAT(0)

4.5.4 Główne wyniki z pracy [H4]

Skończenie generowaną grupę nazywamy *niedokładną* (ang. *non-exact*), jeżeli jej zredukowana C^*–algebra nie jest dokładna (ang. *non-exact*). Równoważnie, grupa taka nie ma własności A Guolianga Yu; por. poprzedni rozdział. Większość klasycznych grup jest *dokładna*, to znaczy nie jest niedokładna. Pierwszymi przykładami grup niedokładnych były tzw. *monstra Gromowa* [Gro03]. Praca [H4] opiera się na mojej konstrukcji grup zawierających izometrycznie zanurzone ekspandery, przedstawionej w [H3]. Głównym wynikiem pracy [H4] jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.5.19 ([H4, Main Theorem])**.** *Istnieją skończenie generowane, rezydualnie skończone grupy niedokładne zadane przez nieskończone graficzne prezentacje małych skreśleń.*

Twierdzenie to rozwiązuje jedno z pytań z rozdziału *Open Problems* książki Browna i Ozawy [BO08, Problem 10.4.6]; tam też można znaleźć motywację dla tego problemu. Moje zainteresowanie tym zagadnieniem jest dwojakie. Po pierwsze, planowałem wykorzystać skonstruowane tam rezydualnie skończone grupy niedokładne do uzyskania dalszych, w istotnym sensie nowych, przykładów grup niedokładnych. Po drugie, uważam, że moje przykłady mogą być użyteczne w konstruowaniu i badaniu przestrzeni metrycznych o nowych, interesujących własnościach zgrubnej geometrii.

Dokładniej, niech G będzie skończenie generowaną, nieskończoną grupą rezydualnie skończoną oraz niech $(N_i)_{i=1}^{\infty}$ będzie ciągiem jej normalnych podgrup o skończonym indeksie takim, że

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} N_i = \{1\}.$$

Przestrzenią pudełkową (ang. *box space*) grupy G odpowiadającą ciągowi (N_i) nazywamy zgrubną rozłączną sumę $\bigsqcup_{i=1}^{\infty} G/N_i$, gdzie każdą ilorazową grupę G/N_i wyposażamy w metrykę słów pochodzącą od ustalonego skończonego zbioru generatorów grupy G. Własności grupy G są często ściśle powiązane z własnościami zgrubno-geometrycznymi jej przestrzeni pudełkowej. Na przykład grupa jest średniowalna wtedy i tylko wtedy, gdy jej przestrzeń pudełkowa ma własność A [Roe03, Proposition 11.39]. Przestrzenie pudełkowe stanowią potężne narzędzie do konstruowania przestrzeni metrycznych o interesujących własnościach zgrubnej geometrii; por. np. [Roe03, Section 11.3]. Zastosowania wyników z [H4] w tym kierunku omawiam w Rozdziale 4.6.4.

Idea konstrukcji grup z Twierdzenia 4.5.19 jest następująca. Grupa zadana jest przez nieskończoną graficzną prezentację małych skreśleń; por. Rozdział 4.4.7. Jest ona granicą prostą ciągu grup (G_i) z epimorficznymi odwzorowaniami wiążącymi. Każda grupa G_i posiada graficzną prezentację małych skreśleń będącą skończonym fragmentem prezentacji nieskończonej. Fragmenty te konstruowane są indukcyjnie, z wykorzystaniem wyników z [H3], w taki sposób, aby spełnione były następujące warunki. Każda grupa G_i jest hiperboliczna i działa geometrycznie na CAT(0) kompleksie kostkowym (na mocy warunku (B) poniżej), a zatem jest rezydualnie skończona na mocy [Ago13]. Dla każdego i istnieje homomorfizm $\varphi_i \colon G_i \to F_i$ do grupy skończonej taki, że żaden nietrywialny element i–kuli wokół jedności nie jest odwzorowywany na element neutralny. Każdy homomorfizm φ_i faktoryzuje się przez epimorfizmy $G_i \twoheadrightarrow G_j$, co indukuje homomorfizm grupy granicznej G do grupy skończonej, iniektywny na dużej kuli. Stąd wynika rezydualna skończoność grupy G. Z kolei niedokładność grupy G wynika z faktu, że jej graf Cayleya zawiera ciąg grafów (relatorów) bez własności A.

Ustalmy $\lambda \in (0, 1/24]$ oraz liczbę naturalną $D \geqslant 3$. Niech $(\Theta, l) = (\Theta_i, l_i)_{i=1}^{\infty}$ będzie ciągiem grafów D–regularnych z etykietowaniem l spełniającym następującą wzmocnioną wersję warunku małych skreśleń $C'(\lambda)$: każda ścieżka w Θ_i o długości co najmniej $\lambda \operatorname{girth}(\Theta_i)$ ma etykietowanie różne od etykietowania dowolnej innej ścieżki. Takie ciągi konstruowane są w [H3].

Konstruuję ciąg $(\widehat{\Theta}, \widehat{l}) = (\widehat{\Theta}_i, \widehat{l}_i)_{i=1}^{\infty}$ normalnych nakryć grafów (Θ_i, l_i) z etykietowaniem indukowanym $\widehat{l}$. Przez G_i oznaczam skończenie prezentowaną grupę daną graficzną prezentacją

$$G_i = \langle S \mid \widehat{\Theta}_1, \widehat{\Theta}_2, \ldots, \widehat{\Theta}_i \rangle.$$

Odwzorowania ilorazowe oznaczamy przez $q_i^j \colon G_i \twoheadrightarrow G_j$, przy czym q_i^{i+1} oznaczamy skrótowo przez q_i. Równocześnie konstruuję homomorfizmy $\varphi_i^j \colon G_i \to F_j$ dla $i \geqslant j$, przy czym φ_i^i oznaczamy przez φ_i. Oznaczamy

$$G = \varinjlim (G_i, q_i^j),$$

a przez $q_i^{\infty} \colon G_i \to G$ oraz $\varphi_{\infty}^i \colon G \to F_i$ odpowiednie odwzorowania graniczne.

Wymagamy, aby etykietowane grafy $(\widehat{\Theta}_i, \widehat{l}_i)_{i=1}^{\infty}$ oraz homomorfizmy $\varphi_i^j \colon G_i \to F_j$ spełniały następujące warunki:

(A) $(\widehat{\Theta}_1, \widehat{l}_1), (\widehat{\Theta}_2, \widehat{l}_2), \ldots$ jest etykietowaniem małych skreśleń typu $C'(\lambda)$;

(B) $(\widehat{\Theta}_1, \widehat{l}_1), \ldots, (\widehat{\Theta}_i, \widehat{l}_i)$ dopuszcza właściwe $\mathbb{Z}_2$–uściennienie dla każdego i;

(C) $\varphi_j(g) \neq 1$ dla każdego j oraz każdego $g \in B_j(1, \operatorname{Cay}(G_j, S)) \setminus \{1\}$;

(D) $\varphi_l^j \circ q_k^l = \varphi_k^j$ dla wszystkich $j \leqslant k \leqslant l$.

W szczególności poniższy diagram jest przemienny.

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[r, "q_1"'] \arrow[d, "\varphi_1"'] & G_2 \arrow[r, "q_2"'] \arrow[dl, "\varphi_2^1"] \arrow[rrr, bend left, "q_2^j"] \arrow[rrrrrrrrr, bend left=30, "q_2^{\infty}"] & G_3 \arrow[r, "q_3"'] \arrow[dll, "\varphi_3^1"] & \cdots & G_j \arrow[r, "q_j"'] \arrow[d, "\varphi_j"'] \arrow[rrr, bend left, "q_j^i"] & G_{j+1} \arrow[r, "q_{j+1}"'] \arrow[dl, "\varphi_{j+1}^j"] & \cdots & G_i \arrow[r, "q_i"'] \arrow[dlll, "\varphi_i^j"] \arrow[rrr, bend left, "q_i^{\infty}"] & G_{i+1} \arrow[r, "q_{i+1}"'] \arrow[dllll, "\varphi_{i+1}^j"] & \cdots \arrow[r] & G \arrow[dllllll, "\varphi_{\infty}^j"] \\
F_1 & & & & F_j & & & & & &
\end{tikzcd}$$

Grafy $\widehat{\Theta}_i$, grupy skończone F_i oraz homomorfizmy φ_i^j (kiedy $j \leqslant i$) konstruuję indukcyjnie względem i.

Dowód Twierdzenia głównego. Prezentacja $\langle S \mid \widehat{\Theta}_1, \widehat{\Theta}_2, \ldots \rangle$ jest graficzną prezentacją małych skreśleń typu $C'(\lambda)$ na mocy warunku (A). Zatem graf Cayleya $\mathrm{Cay}(G,S)$ zawiera izometrycznie zanurzone kopie wszystkich grafów $\widehat{\Theta}_i$ na mocy Lematu 4.4.8. Innymi słowy, $\mathrm{Cay}(G,S)$ zawiera ciąg grafów D–regularnych o rosnącym poprzęgu, a zatem grupa G jest niedokładna na mocy [Wil11].

Pokażemy teraz, że grupa G jest rezydualnie skończona. Weźmy nietrywialny element $g \in G$. Niech i będzie taką liczbą, że $g \in B_i(1, \mathrm{Cay}(G,S))$. Wówczas istnieje element $g' \in G_i$ taki, że $q_i^\infty(g') = g$ oraz $g' \in B_i(1, \mathrm{Cay}(G_i,S))$. Dla homomorfizmu $\varphi_\infty^i \colon G \to F_i$ do grupy skończonej F_i mamy

$$\varphi_\infty^i(g) = \varphi_\infty^i \circ q_i^\infty(g') = \varphi_i(g') \neq 1,$$

na mocy warunków (D) oraz (C). Dowodzi to, że grupa G jest rezydualnie skończona. $\square$

4.6 Dalsze konsekwencje głównych wyników z prac [H1]–[H3]

W niniejszej sekcji opisuję kilka wybranych wyników innych autorów, stanowiących zastosowania moich rezultatów z prac [H1]–[H4].

4.6.1 Dalsze konsekwencje głównych wyników z pracy [H1]

Niedawno, wykorzystując moją konstrukcję z pracy [H1], Lafont–Minemyer–Sorcar–Stover–Wells [LMS+25] skonstruowali hiperboliczne grupy Coxetera, które wirtualnie rozwłókniają (fiber) się nad $\mathbb{Z}$ w każdym wirtualnym wymiarze kohomologicznym $n \geq 2$.

Poza Geometryczną Teorią Grup oraz dziedzinami z nią powiązanymi (w szczególności K-teorią oraz algebrami operatorowymi), techniki kombinatorycznej nieujemnej krzywizny znalazły w ostatnich latach istotne zastosowania również w dalszych obszarach matematyki oraz w informatyce.

Na przykład w pracach [BC18, CKV19] zauważono, że kombinatoryczne konstrukcje wysoko wymiarowych hiperbolicznych w sensie Gromowa grup z prac [JSa03, JSa06, H1] mają zastosowania w algebrze przemiennej, umożliwiając konstruowanie interesujących przykładów w tej dziedzinie.

Jeszcze bardziej zaskakujące zastosowanie pojawiło się w teorii uczenia maszynowego. W pracy Brukhim–Carmon–Dinur–Moran–Yehudayoff [BCD+22] autorzy skonstruowali przykłady rozstrzygające długo otwarte pytanie Natarajana, konstruując klasę nieuczalną (nonlearnable) o wymiarze Natarajana równym 1. Kluczowym składnikiem dowodu jest konstrukcja wysoko wymiarowych pseudorozmaitości o kombinatorycznie ujemnej krzywiźnie, podana przez Januszkiewicza–Świątkowskiego w pracach [JSa03, JSa06]. Konstrukcja ta opiera się na budowie lokalnie CNPC kompleksów grup. W [AHK+23] sugerowane są dalsze zastosowania w tym kierunku rezultatów z [H1].

4.6.2 Dalsze konsekwencje głównych wyników z pracy [H2]

Ashcroft [Ash22] wykazał, że losowe grupy w modelu losowym Gromowa przy gęstości $d < 1/4$ nie mają własności (T) Kazhdana. Dowód ten opiera się na wykorzystaniu pewnej wersji kubizacji wprowadzonej w pracy [H2].

4.6.3 Dalsze konsekwencje głównych wyników z pracy [H3]

Hume [Hum17] wykazał, że istnieje continuum parami różnych skończenie generowanych grup, których grafy Cayleya nie są równoważne w silnym sensie, wykorzystując moją konstrukcję grup z pracy [H3].

Coulon i Gruber [CG19] skonstruowali grupy torsyjne zawierające ekspandery, korzystając z mojego etykietowania małych skreśleń z pracy [H3].

Arzhantseva i Tessera [AT19] udowodnili, że zgrubna zanurzalność w przestrzeń Hilberta nie jest zachowana przez rozszerzenia grup, wykorzystując moją technikę zanurzania grafów w grupy z pracy [H3].

Parametr *twin-width* jest niezmiennikiem grafowym mającym zastosowania w algorytmice, kombinatoryce oraz skończonej teorii modeli. Bonnet–Geniet–Tessera–Thomassé [dBGTT22] wykazali, że istnieją skończenie generowane grupy o nieskończonej wartości tego parametru, co wyjaśnia kilka otwartych pytań w teorii grafów. Dowód ten w istotny sposób opiera się na etykietowaniach małych skreśleń skonstruowanych w pracy [H3].

4.6.4 Dalsze konsekwencje głównych wyników z pracy [H4]

Pillon [Pil18] oraz Sawicki [Saw19] scharakteryzowali przestrzenie pudełkowe (box spaces) rezydualnie skończonych grup niedokładnych w kategoriach geometrycznych. Takie charakteryzacje mają sens dzięki istnieniu tego typu grup, zapewnionemu przez wyniki pracy [H4].

5 Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową albo artystyczną realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub instytucji kultury, w szczególności zagranicznej

1. Wykłady zaproszone (invited lectures) na konferencjach, warsztatach itp., od 2016:
   - 22-24.02.2016, Boundaries of groups and representations, Wiedeń
   - 5-9.07.2016, Metric Spaces: Analysis, Embeddings into Banach Spaces, Applications, College Station
   - 8-13.08.2016, Glances@Manifolds II, Kraków
   - 28.08-3.09.2016, Measured Group Theory, Oberwolfach
   - 9-13.01.2017, Non-Positive Curvature in Action, Cambridge
   - 18-20.05.2017, Groups in Galway, Galway
   - 5-9.06.2017, Propriétés géométriques et probabilistes des groupes infinis, Lille

- 23-29.05.2018, Nonpositively Curved Groups on the Mediterranean, Nachsholim
- 18-22.06.2018, Boundaries of Groups, Luminy
- 9-13.07.2018, Graphs, Surfaces and Cube Complexes, Warwick
- 11.12.2018, Group Theory Seminar, ENS, Paryż
- 24.06-28.06.2019, Rigidity, Warszawa
- 24-26.05.2021, Perspectives on Artin groups, Edynburg
- 7-11.07.2021, GAGTA XIV, Edynburg
- 6-10.12.2021, Metric Graph Theory and Related Topics, Luminy
- 27.02-5.03.2022, Geometric Structures in Group Theory, Oberwolfach
- 2-3.06.2022, Polish Mathematical Society mini-conference, Warszawa
- 1-4.07.2022, Operator algebras, dynamics and groups, Kopanhaga
- 2-4.06.2023, Geometric Topology in New York, Nowy Jork
- 19-30.06.2023, Cube Complexes and Combinatorial Geometry, Montreal
- 3-7.07.2023, 29th Nordic Congress of Mathematicians with EMS (topology session), Aalborg
- 15-19.04.2024, GTA, Bilbao
- 2-6.09.2024, Geometric Group Theory, Banff
- 23-26.09.2024, Buildings 2024, Munster
- 6.12.2024, GGSE, Southampton
- 2-4.05.2025, Cornell Topology Festival, Ithaca
- 26-30.05.2025, Mike Davis' Birthday Conference, Columbus
- 16-20.06.2025, Geometric Group Theory and Related Topics, Pekin
- 18-22.08.2025, Algebraic and Analytic Methods in Group Theory in Warsaw, Warszawa
- 25-29.08.2025, Baby Steps Beyond the Horizon, Będlewo
- 1-5.09.2025, Actions on graphs and metric spaces, Cambridge

2. Serie wykładów

- 1-5.12.2014, Embedding expanders into groups (3x60min), warsztaty "Expanders everywhere!", Neuchâtel
- 11-13.03.2015, Embedding infinite graphs into finitely generated groups (6x45min), Wykłady SSDNM, Warszawa
- 8-11.09.2015, Embedding infinite graphs into groups and applications (6x60min), konferencja "Group actions and metric embeddings", Kyoto

- 2-6.05.2016, Groups containing expanders (6x45min), “Masterclass: Expanders and rigidity of group actions”, University of Copenhagen, Kopenhaga
- 19-23.04.2021, Helly graphs and groups (4x60min), konferencja “Young Geometric Group Theory (YGGT) X”, Newcastle
- 17-19.08.2022, Locally elliptic actions and nonpositive curvature (3x60min), KIAS, Seul
- 13-17.11.2023, Helly graphs and groups (5x60min), “Masterclass: Topics in Geometric Group Theory”, University of Copenhagen, Kopenhaga
- 03.2024, Small cancellation theory (5x60min), University of Leipzig, Lipsk
- 5-16.08.2024, Biautomaticity of Coxeter Groups, ICTS Bangalore

3. Odczyty na kolokwiach

- 13.03.2024 Colloquium, Norman, OK
- 21.05.2020 “Combinatorial nonpositive curvature and group theory”, (webinar), Colloquium, St Petersburg
- 7.06.2018 “Group cubization”, Kolloquium Wilhelm Killing, Muenster
- 23.10.2009 “A construction of high dimensional Gromov hyperbolic Coxeter groups”, Pure Mathematics colloquium, Southampton

4. Zaproszone odczyty na seminariach (od 2016)

   2025: Tokio, Erlangen, Poznań, Wrocław; 2024: Goetheborg, Montreal, Columbus, Norman ; 2023: Lipsk, Nowy Jork; 2022: Kopanhaga, Muenster, Seul, Odense; 2021: Fayetteville (AR) (webinar); 2020: Edynburg (webinar), Montreal; 2019: Buenos Aires; 2018: Lausanne, Muenster, Bonn, Columbus, Boston, Lille; 2017: Montreal, Southampton; 2016: Warszawa, Zurich, Wiedeń, Bielefeld

1. Promowanie doktorantów:

- Mateusz Kandybo, doktorat (oczekiwane 2028), University of Copenhagen.
- Huaitao Gui, doktorat (oczekiwane 2027), University of Copenhagen.
- Karol Duda, doktorat 2023, Uniwersytet Wrocławski, współpromotor z Aleksandrem Iwanowem.
- Daniel Danielski, doktorat 2025, Uniwersytet Wrocławski, współpromotor z Janem Dymarą.
- Dominika Pawlik, doktorat 2017, Uniwersytet Warszawski i Instytut Matematyczny PAN, współpromotor z Jackiem Świątkowskim.
- Tomasz Prytuła, doktorat 2017, Copenhagen University, współpromotor z Jesperem Michaelem Møllerem

2. Uczenie na uniwersytecit (jeśli nie zaznaczono inaczej, wykłady):

   - Kursy na Uniwersytecie Kopenhaskim (University of Copenhagen): "Geometry 2", "Advanced vector spaces", "Homological Algebra", "Graphs and groups"
   - Kursy na Uniwersytecie Wrocławskim: "Analiza 1" (ćwiczenia), "Algebra " (ćwiczenia), "Wstęp do topologii", "Geometria elementarna", , "Geometria nieeuklidesowa", "Kartografia matematyczna", "Matematyka elementarna", "Wstęp do topologii algebraicznej", "Grupy i kompleksy", "Geometria elementarna i nieeuklidasowa", "Topologia algebraiczna I", "Problemy geometrycznej teorii grup I-V" (seminarium)
   - Kursy na Uniwersytecie Wiedeńskim (University of Vienna): "Geometric and asymptotic group theory: Gromov's polynomial growth theorem" (ćwiczenia), "Geometric and asymptotic group theory: Analytic properties of infinite groups" (ćwiczenia), "Geometric and asymptotic group theory: Random groups" (ćwiczenia), "Geometric and asymptotic group theory: Right angled Artin groups" (ćwiczenia), "Gruppentheorie"
   - Kursy na Uniwersytecie McGilla (McGill University): "Applied linear algebra" (MATH270), "Combinatorial negative curvature" (MATH599), "Linear algebra and geometry" (MATH133)

3. Organizacja konferencji itp.

   - współorganizator konferencji „Geometric group theory", Będlewo, April 2004
   - współorganizator serii popularnonaukowych odczytów dla szkół średnich: „Wałbrzyskie Spotkania Matematyczne", 2004-2010, Wałbrzych.
   - współorganizator warsztatów „JSJ-splittings of groups and limit groups", Będlewo, 16-17.05.2005
   - współorganizator konferencji „International Conference and Workshops on Geometric Topology honoring Karol Borsuk's life and work on the 100th anniversary of his birth" Będlewo, Poland, 3-10.07.2005
   - współorganizator warsztatów-konferencji "Topics in Geometric Group Theory" : pierwsza edycja 25-29.06.2007, druga 23-27.06.2008, Będlewo.
   - współorganizator konferencji "Geometric Group Theory—Davis 60", 14-20.06.2009, Będlewo.
   - współorganizator warsztatów-konferencji "Geometric Group Theory" :pierwsza edycja 27.06-3.07.2010, druga 26.06-2.07.2011, Będlewo.
   - członek komitetu naukowego konferencji "3rd Young Geometric Group Theory Meeting", CIRM, Luminy, 20-24.01.2014.
   - współorganizator warsztatów "Kombinatoryka i Grupy" (Combinatorics and Groups), 21-23.04.2015, Będlewo.

- współorganizator warsztatów "Combinatorics and Groups", 11-14.04.2016, Będlewo.
- współorganizator Semestru Simonsa "Geometric and Analytic Group Theory", 1.04-15.07.2019, Warszawa.
- współorganizator konferencji "Cohomological methods", 8-12.04.2019, Warszawa.
- współorganizator konferencji "Non-positive curvature", 20-24.05.2019, Warszawa.
- współorganizator konferencji "Rigidity", 24-28.06.2019, Warszawa.
- członek komitetu naukowego konferencji "Metric Graph Theory and Related Topics", CIRM, Luminy, 6-10.12.2021.
- współorganizator mini-warsztatów "Nonpositively Curved Complexes", 7-13.02.2021, MFO, Oberwol-fach
- współorganizator sesji Geometric Group Theory Section podczas Polsko-Hiszpańskiego Spotkania Matematcznego, 4-8.09.2023, Łódź
- współorganizator szkoły dla doktorantów "Topics in Geometric Group Theory", 13-17.11.2023, University of Copenhagen
- współorganizator konferencji Young Geometric Group Theory, 7-11.4.2025, Kopenhaga

4. Popularyzacja nauki:

   30.05.2012 odczyt w III LO Wrocław; 4.10.2012 odczyt w SP 63 Wrocław; 14.10.2013 odczyt w SP 63 Wrocław; 7.12.2013 Uniwersytet Wrocławski, odczyt dla KFRD (liceum); 25.11.2015 odczyt w LZN (technikum) Wrocław; 26.11.2015 odczyt w XIII LO Wrocław; 2.12.2015odczyt w III LO Wrocław; 21.05 i 4.06.2018 odczyt w SP 63 Wrocław; 30.10.2019 odczyt w UOOM, Bardo Śląskie (liceum); 22.02.2025 odczyt w V LO Wrocław; 12-13.12.2025 cykl odczytów "Grafy, grupy, akcja!" dla Funduszu Zdolni

6 Inne informacje

1. Główne nagrody:
   - 2015 Nagroda naukowa Rektora Uniwersytetu Wroclawskiego
   - 2020 Nagroda Naukowa IMPAN
   - 2021 Nagroda Główna PTM im. Stefana Banacha
2. Granty
   - 1.10.2007-30.09.2008, główny wykonawca, "Marie Curie European Reintegration Grant", Uniwersytet Wrocławski, 40000 EUR
   - 01.06-31.12.2008, główny wykonawca, Grant Naukowy Uniwersytetu Wrocławskiego, no 2947/W/ IM/08, 14930 PLN

- 19.12.2008-31.12.2009, główny wykonawca, Grant Naukowy Uniwersytetu Wrocławskiego, no 2113/W/ IM/08, 8700 PLN
- 11.04.2016-10.04.2020, główny wykonawca, Narodowe Centrum Nauki grant HARMONIA UMO-2015/18/M/ST1/00050, 342000 PLN
- 26.01.2018-25.01.2023, główny wykonawca, Narodowe Centrum Nauki grant OPUS UMO-2017/25/B/ST1/01335, 440520 PLN
- 4.04.2019-3.04.2024, główny wykonawca, Narodowe Centrum Nauki grant HARMONIA UMO-2018/30/M/ST1/00668, 462000 PLN
- 15.01.2020-14.01.2024, główny wykonawca, Narodowe Centrum Nauki grant BEETHOVEN CLASSIC UMO-2018/31/G/ST1/02681, 566580 PLN
- 15.01.2021-14.01.2024, opiekun grantu doktorskiego (główny wykonawca: Daniel Danielski), (Polish) Narodowe Centrum Nauki grant PRELUDIUM UMO-2020/37/N/ST1/01952, 103380 PLN
- 1.01.2024-30.11.2028, główny wykonawca, Carlsberg Foundation, Semper Ardens Grant, 4997000 DKK

3. Recenzje dla:

   - Agencje grantowe: Swiss National Science Foundation (SNSF); European Science Foundation (ESF); Research Foundation - Flanders (FWO)
   - Czasopisma: Acta Mathamatica; Algebraic and Geometric Topology; Annales Scientifiques de l'ÉNS; Bulletin of the London Mathematical Society; Colloquium Mathematicum; Discrete Mathematics; Duke Mathematical Journal; Fundamenta Mathematicae; Geometric and Functional Analysis; Geometry and Topology; Groups, Geometry, and Dynamics; International Journal of Algebra and Computation; International Mathematics Research Notices; Inventiones Mathematicae; J. Combin. Theory Ser. B; Journal of the European Mathematical Society; Journal of the London Mathematical Society; Journal of Topology; Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.; Mathematische Annalen; Michigan Mathematical Journal; Münster Journal of Mathematics; Publicacions Matemàtiques; Topology and its Applications; Proceedings of the AMS; Transactions of the AMS

4. Członkostwo w ciałach akademickich:

   - Członek Kmitetu Redakcyjnego Colloquium Mathematicum (od 2020)
   - Członek Kapituły Nagrody Kamila Duszenki z Matematyki (od 2020)
   - Członek komisji ds. przewodu doktorskiego: Thomas Brown, University of Southampton (2021)
   - Członek komisji ds. przewodu doktorskiego: Martin Axel Blufstein, University of Buenos Aires (2023)

- Członek komisji ds. przewodu habilitacyjnego: Anne Lonjou, University Paris (2025)
- Członek komisji ds. przewodu doktorskiego: Martina Jorgensen, ETH Zurich (2025)
- Członek komisji ds. zatrudnień na stanowisku Professor W3, University Heidelberg (2025)

Literatura

[ABJ+09] Goulnara Arzhantseva, Martin R. Bridson, Tadeusz Januszkiewicz, Ian J. Leary, Ashot Minasyan, and Jacek Świ¸atkowski. Infinite groups with fixed point properties. *Geom. Topol.*, 13(3):1229–1263, 2009.

[AD02] Claire Anantharaman-Delaroche. Amenability and exactness for dynamical systems and their C^*-algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 354(10):4153–4178, 2002.

[AD08] Goulnara Arzhantseva and Thomas Delzant. Examples of random groups, 2008.

[AGHuR02] Noga Alon, Jarosł aw Grytczuk, Mariusz Hał uszczak, and Oliver Riordan. Nonrepetitive colorings of graphs. volume 21, pages 336–346. 2002. Random structures and algorithms (Poznan, 2001).

[Ago13] Ian Agol. The virtual Haken conjecture. *Doc. Math.*, 18:1045–1087, 2013. With an appendix by Agol, Daniel Groves, and Jason Manning.

[AHK+23] Idan Attias, Steve Hanneke, Alkis Kalavasis, Amin Karbasi, and Grigoris Velegkas. Optimal learners for realizable regression: Pac learning and online learning. In A. Oh, T. Naumann, A. Globerson, K. Saenko, M. Hardt, and S. Levine, editors, *Advances in Neural Information Processing Systems*, volume 36, pages 44707–44739. Curran Associates, Inc., 2023.

[AS00] Noga Alon and Joel H. Spencer. *The probabilistic method*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, second edition, 2000. With an appendix on the life and work of Paul Erdős.

[Ash22] Calum J Ashcroft. Random groups do not have property (t) at densities below 1/4, 2022.

[AT19] Goulnara Arzhantseva and Romain Tessera. Admitting a coarse embedding is not preserved under group extensions. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (20):6480–6498, 2019.

[BC08] Hans-Jürgen Bandelt and Victor Chepoi. Metric graph theory and geometry: a survey. In *Surveys on discrete and computational geometry*, volume 453 of *Contemp. Math.*, pages 49–86. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

[BC18] Türker Bıyıkoğlu and Yusuf Civan. Castelnuovo-Mumford regularity of graphs. *Combinatorica*, 38(6):1353–1383, 2018.

[BCD+22] Nataly Brukhim, Daniel Carmon, Irit Dinur, Shay Moran, and Amir Yehudayoff. A characterization of multiclass learnability. In *2022 IEEE 63rd Annual Symposium on Foundations of Computer Science—FOCS 2022*, pages 943–955. IEEE Computer Soc., Los Alamitos, CA, 2022.

[BdlHV08] Bachir Bekka, Pierre de la Harpe, and Alain Valette. *Kazhdan's property (T)*, volume 11 of *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[Bes] Mladen Bestvina. Questions in geometric group theory. http://www.math.utah.edu/ bestvina/eprints/questions-updated.pdf.

[BGW16] Paul Baum, Erik Guentner, and Rufus Willett. Expanders, exact crossed products, and the Baum-Connes conjecture. *Ann. K-Theory*, 1(2):155–208, 2016.

[BO08] Nathanial P. Brown and Narutaka Ozawa. *C^*-algebras and finite-dimensional approximations*, volume 88 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[CG19] Rémi Coulon and Dominik Gruber. Small cancellation theory over Burnside groups. *Adv. Math.*, 353:722–775, 2019.

[CKV19] Alexandru Constantinescu, Thomas Kahle, and Matteo Varbaro. Linear syzygies, hyperbolic Coxeter groups and regularity. *Compos. Math.*, 155(6):1076–1097, 2019.

[CMV04] Pierre-Alain Cherix, Florian Martin, and Alain Valette. Spaces with measured walls, the Haagerup property and property (T). *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 24(6):1895–1908, 2004.

[CN05a] Indira Chatterji and Graham Niblo. From wall spaces to CAT(0) cube complexes. *Internat. J. Algebra Comput.*, 15(5-6):875–885, 2005.

[CN05b] Indira Chatterji and Graham Niblo. From wall spaces to CAT(0) cube complexes. *Internat. J. Algebra Comput.*, 15(5-6):875–885, 2005.

[CO15] Victor Chepoi and Damian Osajda. Dismantlability of weakly systolic complexes and applications. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 367(2):1247–1272, 2015.

[Cor15] Yves Cornulier. Irreducible lattices, invariant means, and commensurating actions. *Math. Z.*, 279(1-2):1–26, 2015.

[Cou14] Rémi Coulon. On the geometry of Burnside quotients of torsion free hyperbolic groups. *Internat. J. Algebra Comput.*, 24(3):251–345, 2014.

[Dav08] Michael W. Davis. *The geometry and topology of Coxeter groups*, volume 32 of *London Mathematical Society Monographs Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008.

[dBGTT22] Édouard Bonnet, Colin Geniet, Romain Tessera, and Stéphan Thomassé. Twin-width vii: groups, 2022.

[DO07] Jan Dymara and Damian Osajda. Boundaries of right-angled hyperbolic buildings. *Fund. Math.*, 197:123–165, 2007.

[GK02] Erik Guentner and Jerome Kaminker. Exactness and the Novikov conjecture. *Topology*, 41(2):411–418, 2002.

[GK04] Erik Guentner and Jerome Kaminker. Geometric and analytic properties of groups. In *Noncommutative geometry*, volume 1831 of *Lecture Notes in Math.*, pages 253–262. Springer, Berlin, 2004.

[Gro93] M. Gromov. Asymptotic invariants of infinite groups. In *Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991)*, volume 182 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 1–295. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

[Gro03] M. Gromov. Random walk in random groups. *Geom. Funct. Anal.*, 13(1):73–146, 2003.

[Gru15] Dominik Gruber. Groups with graphical $C(6)$ and $C(7)$ small cancellation presentations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 367(3):2051–2078, 2015.

[Hag] Frédéric Haglund. Complexes simpliciaux hyperboliques de grande dimension.

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[HG04] Nigel Higson and Erik Guentner. Group C^*-algebras and K-theory. In *Noncommutative geometry*, volume 1831 of *Lecture Notes in Math.*, pages 137–251. Springer, Berlin, 2004.

[HK01] Nigel Higson and Gennadi Kasparov. E-theory and KK-theory for groups which act properly and isometrically on Hilbert space. *Invent. Math.*, 144(1):23–74, 2001.

[HLS02] N. Higson, V. Lafforgue, and G. Skandalis. Counterexamples to the Baum-Connes conjecture. *Geom. Funct. Anal.*, 12(2):330–354, 2002.

[HP98] Frédéric Haglund and Frédéric Paulin. Simplicité de groupes d'automorphismes d'espaces à courbure négative. In *The Epstein birthday schrift*, volume 1 of *Geom. Topol. Monogr.*, pages 181–248. Geom. Topol. Publ., Coventry, 1998.

[HR00] Nigel Higson and John Roe. Amenable group actions and the Novikov conjecture. *J. Reine Angew. Math.*, 519:143–153, 2000.

[Hum17] David Hume. A continuum of expanders. *Fund. Math.*, 238(2):143–152, 2017.

[JSa03] Tadeusz Januszkiewicz and Jacek Świ¸atkowski. Hyperbolic Coxeter groups of large dimension. *Comment. Math. Helv.*, 78(3):555–583, 2003.

[JSa06] Tadeusz Januszkiewicz and Jacek Świ¸atkowski. Simplicial nonpositive curvature. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (104):1–85, 2006.

[JSa07] Tadeusz Januszkiewicz and Jacek Świ¸atkowski. Filling invariants of systolic complexes and groups. *Geom. Topol.*, 11:727–758, 2007.

[Khu14] A. Khukhro. Embeddable box spaces of free groups. *Math. Ann.*, 360(1-2):53–66, 2014.

[LMS+25] Jean-François Lafont, Barry Minemyer, Gangotryi Sorcar, Matthew Stover, and Joseph Wells. High dimensional hyperbolic coxeter groups that virtually fiber. *Math. Ann.*, 393:3083–3107, 2025.

[LPS88] A. Lubotzky, R. Phillips, and P. Sarnak. Ramanujan graphs. *Combinatorica*, 8(3):261–277, 1988.

[LS77] Roger C. Lyndon and Paul E. Schupp. *Combinatorial group theory*, volume Band 89 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas]*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.

[Mar88] G. A. Margulis. Explicit group-theoretic constructions of combinatorial schemes and their applications in the construction of expanders and concentrators. *Problemy Peredachi Informatsii*, 24(1):51–60, 1988.

[Mou88] Gabor Moussong. *Hyperbolic Coxeter groups*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1988. Thesis (Ph.D.)–The Ohio State University.

[Ms97] Jiˇ rí Matouˇ sek. On embedding expanders into l_p spaces. *Israel J. Math.*, 102:189–197, 1997.

[NA68] P. S. Novikov and S. I. Adjan. Infinite periodic groups. I. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 32:212–244, 1968.

[Neu05] Markus Neuhauser. Relative property (T) and related properties of wreath products. *Math. Z.*, 251(1):167–177, 2005.

[Nib] G. Niblo. Questions on cat(0) cube complexes. https://docs.google.com/file/d/0B-tup63120-GZTlBS2xwdG5TTmM/edit.

[Nic04] Bogdan Nica. Cubulating spaces with walls. *Algebr. Geom. Topol.*, 4:297–309, 2004.

[Now07] Piotr W. Nowak. Coarsely embeddable metric spaces without Property A. *J. Funct. Anal.*, 252(1):126–136, 2007.

[NY12] Piotr W. Nowak and Guoliang Yu. *Large scale geometry*. EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2012.

[Obe] Geometrization of kazhdan's property (t). Abstracts from the mini-workshop held July 7–14, 2001; Organized by B. Bekka, P. de la Harpe, A. Valette; Report No. 29/2001.

[Oll06] Yann Ollivier. On a small cancellation theorem of Gromov. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 13(1):75–89, 2006.

[Osa07] Damian Osajda. Connectedness at infinity of systolic complexes and groups. *Groups Geom. Dyn.*, 1(2):183–203, 2007.

[Osa08] Damian Osajda. Ideal boundary of 7-systolic complexes and groups. *Algebr. Geom. Topol.*, 8(1):81–99, 2008.

[Osa13] Damian Osajda. A combinatorial non-positive curvature i: weak systolicity, 2013. https://arxiv.org/abs/1305.4661.

[OSa15] Damian Osajda and Jacek Świ¸atkowski. On asymptotically hereditarily aspherical groups. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 111(1):93–126, 2015.

[Ost13] Mikhail I. Ostrovskii. *Metric embeddings*, volume 49 of *De Gruyter Studies in Mathematics*. De Gruyter, Berlin, 2013. Bilipschitz and coarse embeddings into Banach spaces.

[Oza00] Narutaka Ozawa. Amenable actions and exactness for discrete groups. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 330(8):691–695, 2000.

[Pil18] Thibault Pillon. Coarse amenability at infinity, 2018.

[Roe03] John Roe. *Lectures on coarse geometry*, volume 31 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[RS87] Eliyahu Rips and Yoav Segev. Torsion-free group without unique product property. *J. Algebra*, 108(1):116–126, 1987.

[Sap14] Mark Sapir. A Higman embedding preserving asphericity. *J. Amer. Math. Soc.*, 27(1):1–42, 2014.

[Saw19] Damian Sawicki. Warped cones, (non-)rigidity, and piecewise properties. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 118(4):753–786, 2019. With an appendix by Dawid Kielak and Sawicki.

[Sha] Yehuda Shalom. Rigidity theory of discrete groups.

[Sha06] Yehuda Shalom. The algebraization of Kazhdan's property (T). In *International Congress of Mathematicians. Vol. II*, pages 1283–1310. Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.

[Tho95] Richard M. Thomas. Group presentations where the relators are proper powers. In *Groups '93 Galway/St. Andrews, Vol. 2*, volume 212 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 549–560. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[Vin85] È.B̃. Vinberg. Hyperbolic groups of reflections. *Uspekhi Mat. Nauk*, 40(1(241)):29–66, 255, 1985.

[Wil09] Rufus Willett. Some notes on property A. In *Limits of graphs in group theory and computer science*, pages 191–281. EPFL Press, Lausanne, 2009.

[Wil11] Rufus Willett. Property A and graphs with large girth. *J. Topol. Anal.*, 3(3):377–384, 2011.

[Wis] Daniel T. Wise. The structure of groups with quasiconvex hierarchy. https://docs.google.com/open?id=0B45cNx80t5-2T0twUDFxVXRnQnc.

[Wis12] Daniel T. Wise. *From riches to raags: 3-manifolds, right-angled Artin groups, and cubical geometry*, volume 117 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.

[WY12] Rufus Willett and Guoliang Yu. Higher index theory for certain expanders and Gromov monster groups, I. *Adv. Math.*, 229(3):1380–1416, 2012.

[Yu00] Guoliang Yu. The coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into Hilbert space. *Invent. Math.*, 139(1):201–240, 2000.