Jak rzucać losowe spojrzenia na ruch Browna by w nim wszystko dojrzeć

Jan Obłój

Uniwersytet Warszawski

Université Paris 6

Plan referatu

1. Wstępne definicje
2. Czasy dojścia i problem zanurzeń Skorochoda
3. Zmiany czasu i zanurzanie procesów

Plan referatu

1. Notacja i definicje
2. Czasy dojścia i problem zanurzeń Skorochoda
   - Dojścia do 2 punktów: rozwiązania Skorochoda oraz Chacona-Walsha
   - Dojścia do bariery: rozwiązanie Root'a
   - Sprytniejsze dojścia: rozwiązanie Azémy-Yora
3. Zmiany czasu i zanurzanie procesów
   - Iterowanie Skorochoda
   - Tw Dambis-Dubins-Schwarz
   - Subordynacja

Definicje i notacja

- *Ruch Browna*, $B = (B_t : t \geqslant 0)$, scentrowany proces o *ciągłych trajektoriach*, o przyrostach niezależnych i stacjonarnych:
  $(B_{t+s} - B_t)$ to nowy ruch Browna niezależny od $(B_u : u \leqslant t)$.

Definicje i notacja

- *Ruch Browna*, $B = (B_t : t \geqslant 0)$, scentrowany proces o *ciągłych trajektoriach*, o przyrostach niezależnych i stacjonarnych: $(B_{t+s} - B_t)$ to nowy ruch Browna niezależny od $(B_u : u \leqslant t)$.
- Ciągły martyngał (lokalny), $M = (M_t : t \geqslant 0)$ (czyli w zasadzie $\mathbb{E}[M_{t+s}|\mathcal{F}_t] = M_t$). Charakteryzowany przez wariację: $\langle M \rangle$, niemalejący, ciągły proces t.że $M_t^2 - \langle M \rangle_t$ jest martyngałem. $M = B \iff \langle M \rangle_t = t$.

Definicje i notacja

- *Ruch Browna*, $B = (B_t : t \geqslant 0)$, scentrowany proces o *ciągłych trajektoriach*, o przyrostach niezależnych i stacjonarnych: $(B_{t+s} - B_t)$ to nowy ruch Browna niezależny od $(B_u : u \leqslant t)$.
- Ciągły martyngał (lokalny), $M = (M_t : t \geqslant 0)$ (czyli w zasadzie $\mathbb{E}[M_{t+s}|\mathcal{F}_t] = M_t$). Charakteryzowany przez wariację: $\langle M \rangle$, niemalejący, ciągły proces t.że $M_t^2 - \langle M \rangle_t$ jest martyngałem. $M = B \Leftrightarrow \langle M \rangle_t = t$.
- *Moment stopu*, T, zmienna losowa w $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, t.że $\{T \leqslant t\}$ jest $\mathcal{F}_t$ mierzalna, czyli taka "realna strategia zatrzymywania", np.: pierwsze momenty dojścia do ustalonego zbioru.

Definicje i notacja

- *Ruch Browna*, $B = (B_t : t \geqslant 0)$, scentrowany proces o *ciągłych trajektoriach*, o przyrostach niezależnych i stacjonarnych:
  $(B_{t+s} - B_t)$ to nowy ruch Browna niezależny od $(B_u : u \leqslant t)$.
- Ciągły martyngał (lokalny), $M = (M_t : t \geqslant 0)$ (czyli w zasadzie $\mathbb{E}[M_{t+s}|\mathcal{F}_t] = M_t$). Charakteryzowany przez wariację: $\langle M \rangle$, niemalejący, ciągły proces t.że $M_t^2 - \langle M \rangle_t$ jest martyngałem. $M = B \Leftrightarrow \langle M \rangle_t = t$.
- *Moment stopu*, T, zmienna losowa w $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, t.że $\{T \leqslant t\}$ jest $\mathcal{F}_t$ mierzalna, czyli taka "realna strategia zatrzymywania",
  np.: pierwsze momenty dojścia do ustalonego zbioru.
- Miara probabilistyczna, μ, $\mu \in \mathcal{M}_0^1$ jeśli $\int |x| d\mu(x) < \infty$ oraz $\int x d\mu(x) = 0$.
  Jeśli X zmienna losowa o rozkładzie μ to piszemy $X \sim \mu$.

Problem zanurzenia Skorochoda

Dla $B = (B_t : t \geqslant 0)$ ruchu Browna,

miary probabilistycznej μ,

Problem zanurzenia Skorochoda

Dla $B = (B_t : t \geqslant 0)$ ruchu Browna,

miary probabilistycznej μ,

znaleźć moment stopu T,

taki że $B_T \sim \mu$.

Problem zanurzenia Skorochoda

Dla $B = (B_t : t \geqslant 0)$ ruchu Browna,

miary probabilistycznej μ,

znaleźć moment stopu T, "mały",

taki że $B_T \sim \mu$.

Problem zanurzenia Skorochoda

Dla $B = (B_t : t \geqslant 0)$ ruchu Browna,

miary probabilistycznej μ,

znaleźć moment stopu T, całkowalny,

taki że $B_T \sim \mu$.

Problem zanurzenia Skorochoda

Dla $B = (B_t : t \geqslant 0)$ ruchu Browna,

miary probabilistycznej μ, scentrowanej, o skończonej wariancji,

znaleźć moment stopu T, całkowalny,

taki że $B_T \sim \mu$.

Problem zanurzenia Skorochoda

Dla $B = (B_t : t \geqslant 0)$ ruchu Browna,

miary probabilistycznej μ, scentrowanej, o skończonej wariancji,

znaleźć moment stopu T, całkowalny, $\rightsquigarrow$ *T wyrażony explicite*

taki że $B_T \sim \mu$.$\rightsquigarrow$ *$(B_{t \wedge T})$ jest UI*

Problem zanurzenia Skorochoda

Dla $B = (B_t : t \geqslant 0)$ ruchu Browna,

miary probabilistycznej μ, scentrowanej, o skończonej wariancji,

znaleźć moment stopu T, całkowalny, $\rightsquigarrow$ T *wyrażony explicite*

taki że $B_T \sim \mu$.$\rightsquigarrow$ $(B_{t\wedge T})$ *jest UI*

Dla $a < 0 < b$, $\mu = p\delta_a + (1-p)\delta_b \Rightarrow T_{a,b} = \inf\{t \geqslant 0 : B_t \notin [a,b]\}$;

Problem zanurzenia Skorochoda

Dla $B = (B_t : t \geqslant 0)$ ruchu Browna,

miary probabilistycznej μ, scentrowanej, o skończonej wariancji,

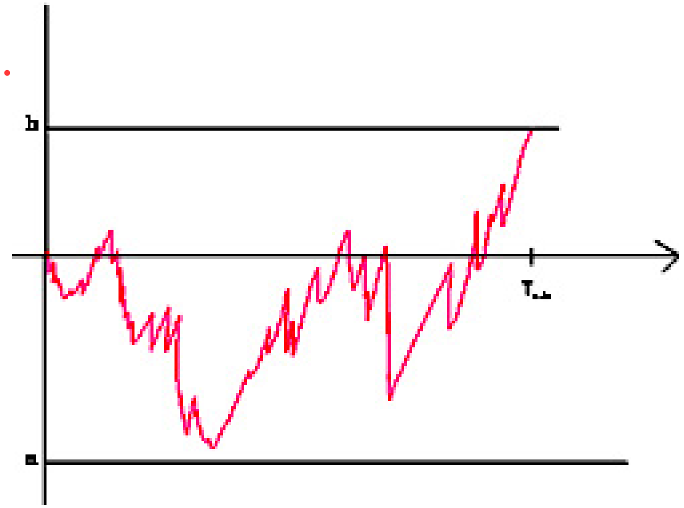
znaleźć moment stopu T, całkowalny, $\rightsquigarrow$ *T wyrażony explicite*

taki że $B_T \sim \mu$.$\rightsquigarrow$ *$(B_{t\wedge T})$ jest UI*

Dla $a < 0 < b$, $\mu = p\delta_a + (1-p)\delta_b \Rightarrow T_{a,b} = \inf\{t \geqslant 0 : B_t \notin [a,b]\}$;

Dla $\mu = \frac{1}{4}\delta_{-2} + \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{4}\delta_2$ istnieje bardzo dużo rozwiązań, np.:

$$\begin{aligned} T_D &= \inf\{t > T_{-1,1} : B_t \in \{-2,0,2\}\} \\ T_{AY} &= \inf\{t > T_{-2,2/3} : B_t \in \{-2,0,2\}\}. \end{aligned}$$



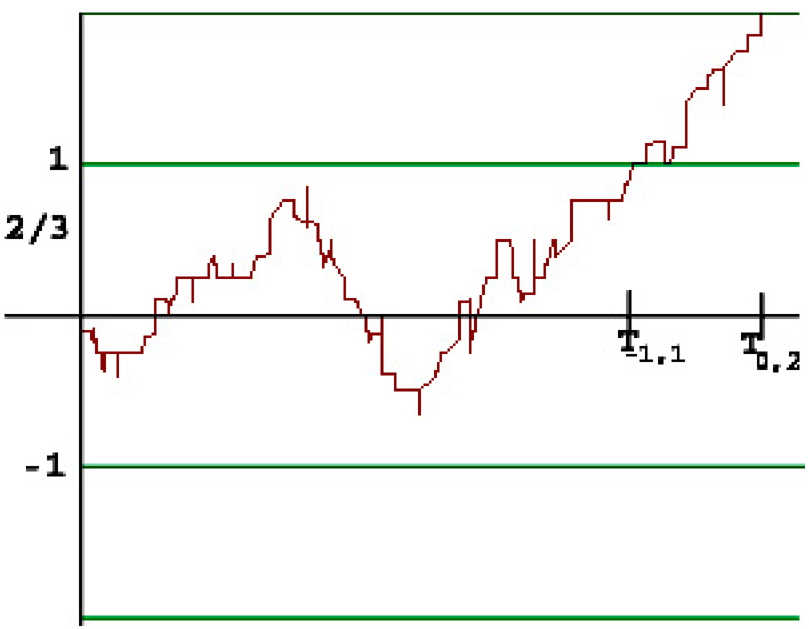
Przypomnijmy: dla $a < 0 < b$,

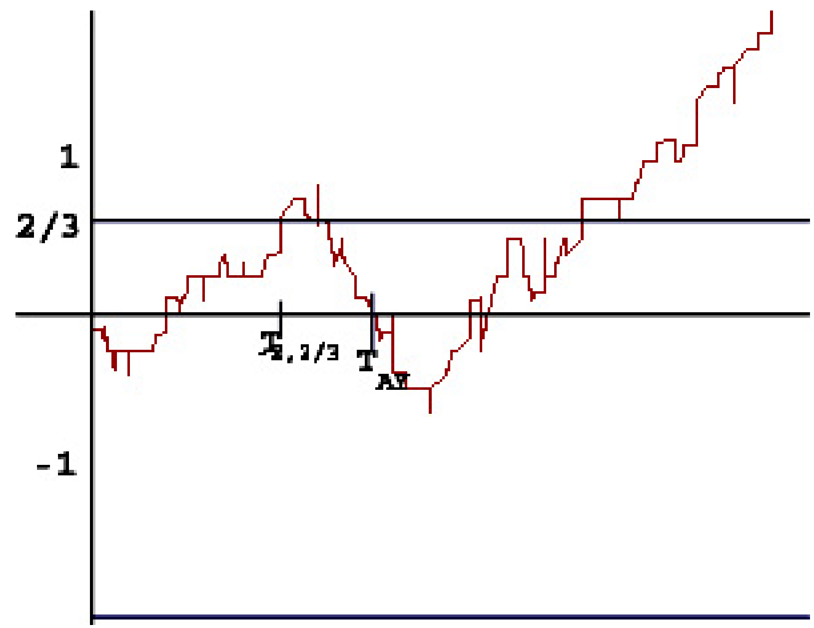
$\mathbb{P}\Big(B_{T_{a,b}} = a\Big) = \frac{b}{b+|a|}$, $\mathbb{E}B_{T_{a,b}} = 0$.

Przykład

Dla $\mu = \frac{1}{4}\delta_{-2} + \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{4}\delta_2$ istnieje bardzo dużo rozwiązań, np.:

$$
\begin{aligned}
T_D &= \inf\{t > T_{-1,1} : B_t \in \{-2, 0, 2\}\} \\
T_{AY} &= \inf\{t > T_{-2,2/3} : B_t \in \{-2, 0, 2\}\}.
\end{aligned}
$$





Czasy wyjścia z $[a, b]$ - rozwiązanie Skorochoda

Niech $a < 0 < b$ oraz $T_{a,b} := \inf\{t \geqslant 0 : B_t \notin [a, b]\} = \inf\{t \geqslant 0 : B_t \in \{a, b\}\}$.

Miara $B_{T_{a,b}} \sim \mu_{a,b}$ jest scentrowana, skupiona w 2 punktach: a i b.

Czasy wyjścia z $[a, b]$ - rozwiązanie Skorochoda

Niech $a < 0 < b$ oraz $T_{a,b} := \inf\{t \geqslant 0 : B_t \notin [a, b]\} = \inf\{t \geqslant 0 : B_t \in \{a, b\}\}$.

Miara $B_{T_{a,b}} \sim \mu_{a,b}$ jest scentrowana, skupiona w 2 punktach: a i b.

- Skorochod – każda miarę można przedstawić jako niezależną mieszankę miar $\mu_{a,b}$ tj. $\forall \mu \in \mathcal{M}_0^1$, $\exists X$ zm. los. niedodatnia oraz $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ t.że $\mu \sim \mu_{X,\rho(X)}$, a zatem dla X i $B = (B_t : t \geqslant 0)$ niezależnych, $T_{X,\rho(X)} = \inf\{t \geqslant 0 : B_t \notin [X, \rho(X)]\}$ daje: $B_T \sim \mu$.

Czasy wyjścia z $[a, b]$ - rozwiązanie Skorochoda

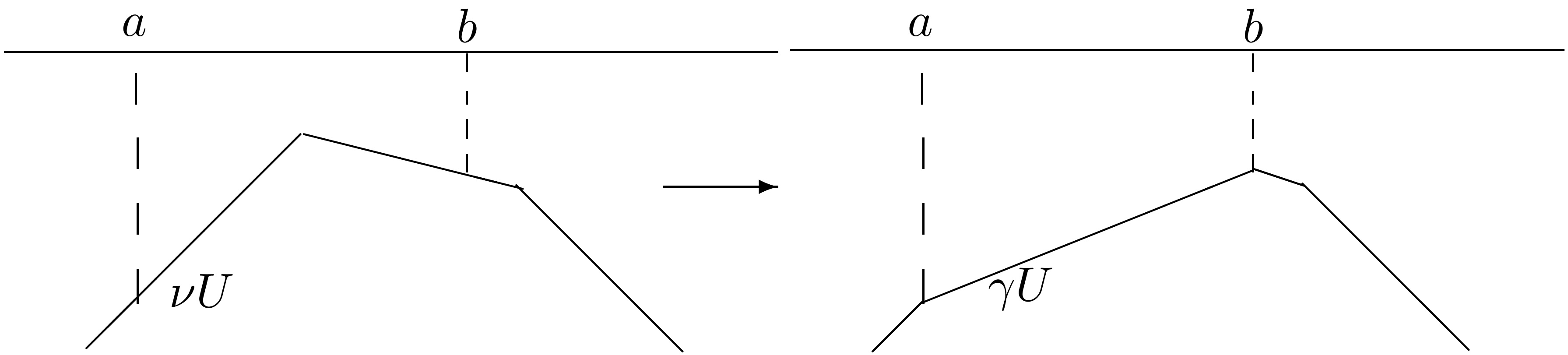
Niech $a < 0 < b$ oraz $T_{a,b} := \inf\{t \geqslant 0 : B_t \notin [a, b]\} = \inf\{t \geqslant 0 : B_t \in \{a, b\}\}$.
Miara $B_{T_{a,b}} \sim \mu_{a,b}$ jest scentrowana, skupiona w 2 punktach: a i b.

- Skorochod – każda miarę można przedstawić jako niezależną mieszankę miar $\mu_{a,b}$ tj. $\forall \mu \in \mathcal{M}_0^1$, $\exists X$ zm. los. niedodatnia oraz $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ t.że $\mu \sim \mu_{X,\rho(X)}$, a zatem dla X i $B = (B_t : t \geqslant 0)$ niezależnych, $T_{X,\rho(X)} = \inf\{t \geqslant 0 : B_t \notin [X, \rho(X)]\}$ daje: $B_T \sim \mu$.
- Aby pozbyć się zewnętrznej randomizacji (X powyżej) będziemy składać T_{a_n,b_n}. Kluczowym narzędziem jest potencjał miary probabilistycznej $\mu \in \mathcal{M}_0^1$:
$$\mu U(x) := -\int |x - y| d\mu(y) \leqslant -\left| \int (x - y) d\mu(y) \right| = -|x|,$$
funkcja wklęsła, Lipschitzowska, która pozwala badać zbieżność miar probabilistycznych.

Rozwiązanie Chacona i Walsha

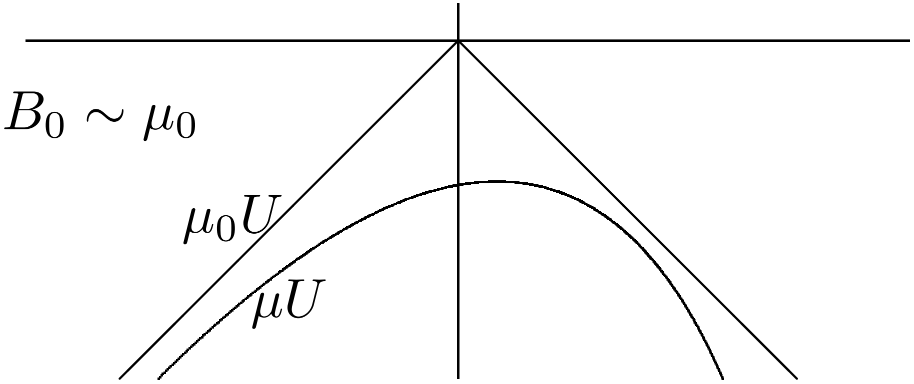
Dla $\mu \in \mathcal{M}_0^1$ mamy: $\mu U(x) = -\int |x-y| d\mu(y)$.

Łatwo widać, że jeśli $B_0 \sim \nu$, to po zatrzymaniu $B_{T_{a,b}} \sim \gamma$, gdzie γU otrzymuje się z νU przez liniowe obcięcie νU pomiędzy $\nu U(a)$ a $\nu U(b)$:



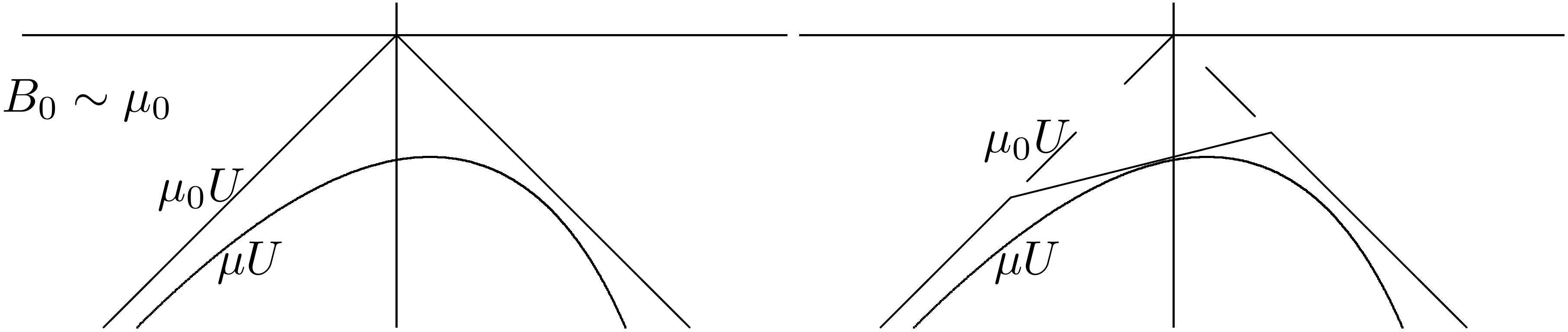
Rozwiązanie Chacon-Walsh – c.d.

Funkcja wklęsła zapisuje się jako przeliczalna granica funkcji afinicznych. Kolejne funkcje to liniowe obcięcia poprzednich, co odpowiada zatrzymaniu ruchu Browna w momencie wyjścia z jakiegoś przedziału. Dostajemy tak całą rodzinę rozwiązań:



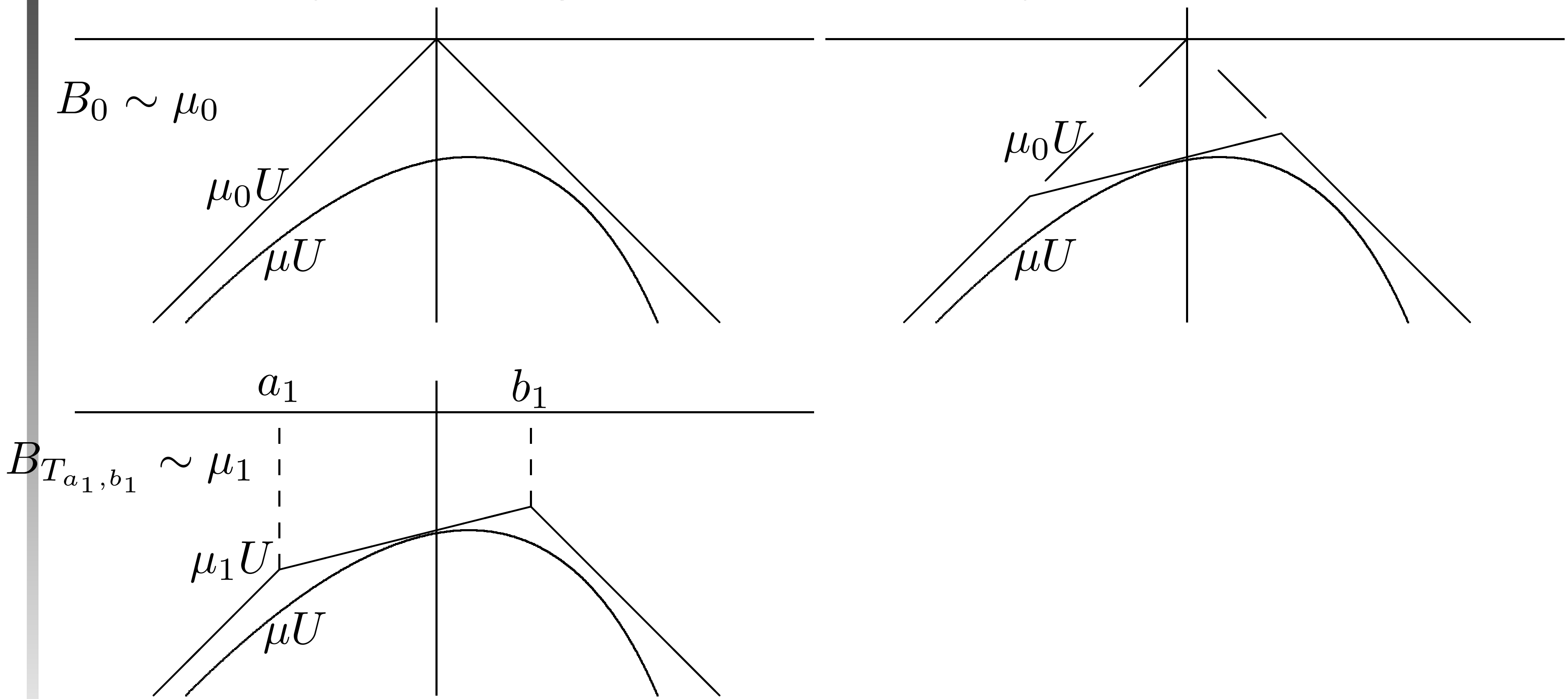
Rozwiązanie Chacon-Walsh – c.d.

Funkcja wklęsła zapisuje się jako przeliczalna granica funkcji afinicznych. Kolejne funkcje to liniowe obcięcia poprzednich, co odpowiada zatrzymaniu ruchu Browna w momencie wyjścia z jakiegoś przedziału. Dostajemy tak całą rodzinę rozwiązań:



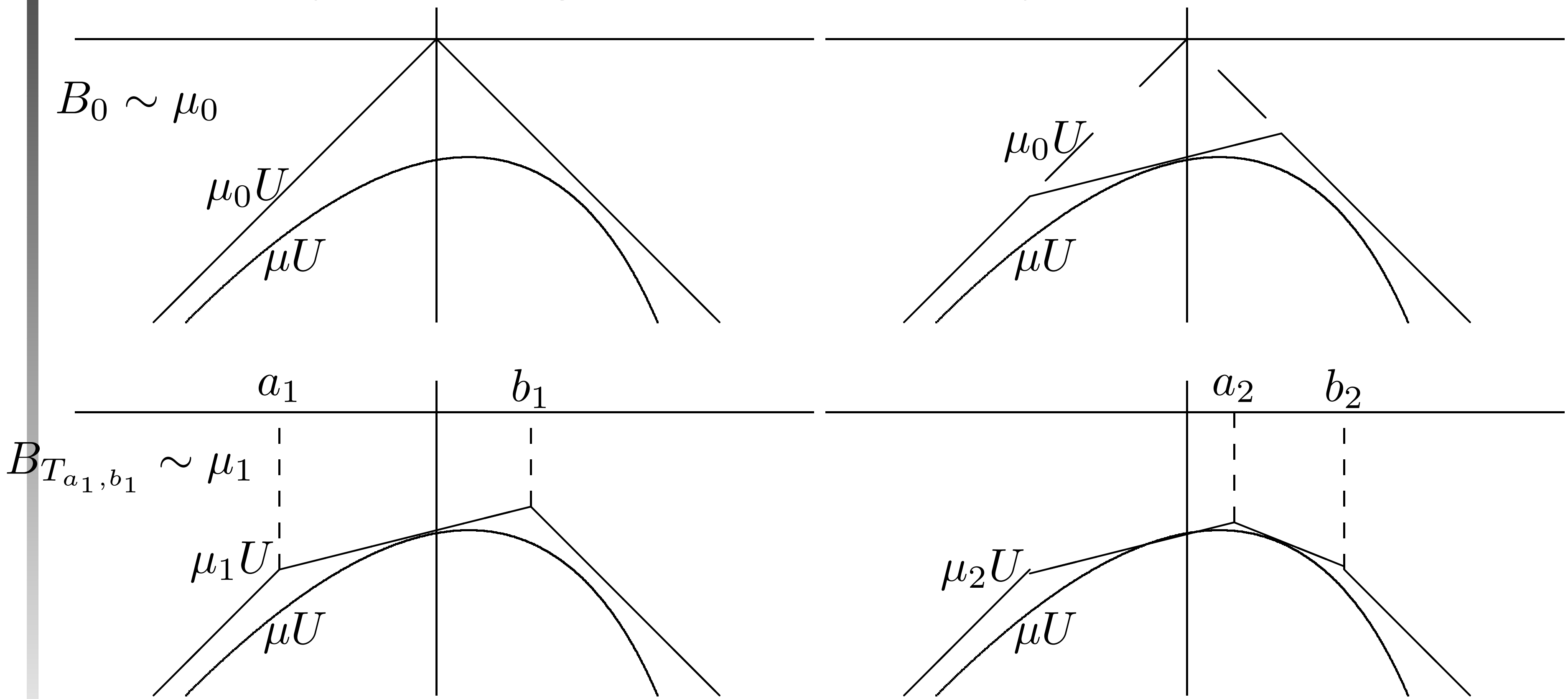
Rozwiązanie Chacon-Walsh – c.d.

Funkcja wklęsła zapisuje się jako przeliczalna granica funkcji afinicznych. Kolejne funkcje to liniowe obcięcia poprzednich, co odpowiada zatrzymaniu ruchu Browna w momencie wyjścia z jakiegoś przedziału. Dostajemy tak całą rodzinę rozwiązań:



Rozwiązanie Chacon-Walsh – c.d.

Funkcja wklęsła zapisuje się jako przeliczalna granica funkcji afinicznych. Kolejne funkcje to liniowe obcięcia poprzednich, co odpowiada zatrzymaniu ruchu Browna w momencie wyjścia z jakiegoś przedziału. Dostajemy tak całą rodzinę rozwiązań:



$T_1 = T_{a_1,b_1}; \ldots; \ T_n = \inf\{t \geqslant T_{n-1} : B_t \notin [a_n, b_n]\}, T = \lim T_n$, wtedy $B_T \sim \mu$.

Rozwiązanie Root'a

Poprzednia konstrukcja, oparta na momentach wyjścia z przedziałów, daje bezpośrednie wzory w przypadku miar atomowych: $\mu(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}) = 1$. Dla miar z gęstością konieczne jest przejście graniczne i nie mamy bezpośrednich wzorów.

Rodzina momentów stopu:

$$T = \inf\{t \geqslant 0 : B_t \in A\}, \quad A \subset \mathbb{R},$$

jest zbyt uboga.

Rozwiązanie Root'a

Poprzednia konstrukcja, oparta na momentach wyjścia z przedziałów, daje bezpośrednie wzory w przypadku miar atomowych: $\mu(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}) = 1$. Dla miar z gęstością konieczne jest przejście graniczne i nie mamy bezpośrednich wzorów.

Rodzina momentów stopu:

$$T = \inf\{t \geqslant 0 : B_t \in A\}, \quad A \subset \mathbb{R},$$

jest zbyt uboga.

Rozpatrzmy momenty dojścia dla zbiorów w *czaso-przestrzeni* a nie jedynie w *przestrzeni*:

$$T = \inf\{t \geqslant 0 : (t, B_t) \in R\}, \quad R \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}.$$

Rozwiązanie Root'a

Moments stopu Root'a

$$T_R = \inf\{t \geqslant 0 : (t, B_t) \in R\}, \quad R \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},$$

będziemy rozpatrywać dla barier, to jest takich R, że $(t, x) \in R \Rightarrow (t + h, x) \in R$, $h > 0$.

Rozwiązanie Root'a

Momenty stopu Root'a

$$T_R = \inf\{t \geqslant 0 : (t, B_t) \in R\}, \quad R \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},$$

będziemy rozpatrywać dla barier, to jest takich R, że $(t,x) \in R \Rightarrow (t+h,x) \in R$, $h > 0$.

Okazuje się, że dla każdej miary probabilistycznej $\mu \in \mathcal{M}_0^2$ istnieje bariera $R_\mu \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, taka że $B_{T_{R_\mu}} \sim \mu$.

Niestety, chociaż istnienie bariery jest stosunkowo łatwo pokazać, to wyznaczenie bariery dla danej miary udaje się niezwykle rzadko!

(i na odwrót)

Rozwiązanie Azémy-Yora

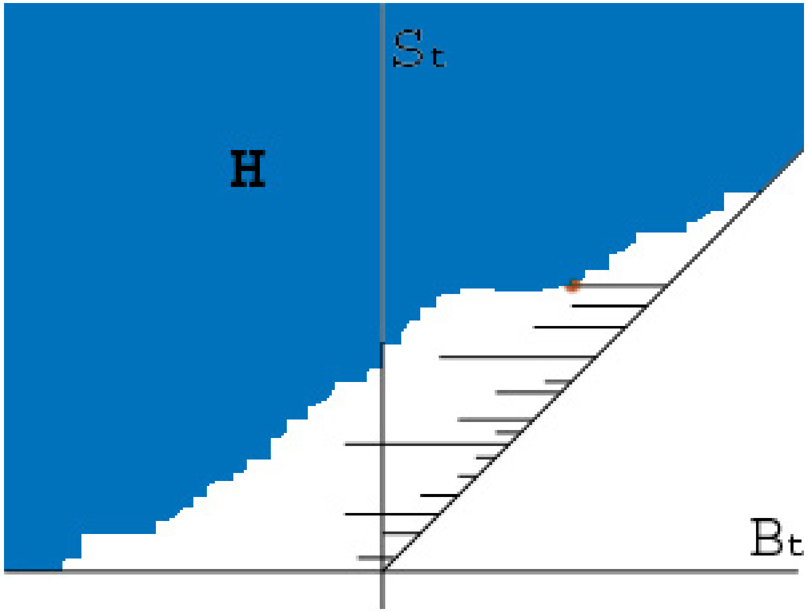
W konstrukcji Root'a rozważaliśmy momenty dojścia dla dwuwymiarowego procesu: (t, B_t). Spróbujmy zastąpić deterministyczny proces pierwszej współrzędnej przez inny proces!

Rozwiązanie Azémy-Yora

W konstrukcji Root'a rozważaliśmy momenty dojścia dla dwuwymiarowego procesu: (t, B_t). Spróbujmy zastąpić deterministyczny proces pierwszej współrzędnej przez inny proces!

Rozważmy proces (S_t, B_t) gdzie $S_t = \sup_{u \leqslant t} B_u$. Taki proces przybiera wartości w zbiorze: $\{(s,x) : s \geqslant \max\{0,x\}\}$. Dla rosnącej funkcji $\Psi(x) \geqslant x$ popatrzmy na pierwszy moment dojścia dla (S_t, B_t) do $\mathbb{H}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &= \{(s,x) \in \mathbb{R}^2 : s \geqslant \Psi(x)\} \\ T_{AY} &= \inf\{t \geqslant 0 : (S_t, B_t) \in \mathbb{H}\} \\ &= \inf\{t \geqslant 0 : S_t = \Psi(B_t)\}. \end{aligned}$$



Rozwiązanie Azémy-Yora - c.d.

- Niech $S_t = \sup_{s \leqslant t} B_s$, $\overline{\mu}(x) = \mu([x, \infty))$

  $T = T_{AY} = \inf\{t \geqslant 0 : \Psi(B_t) = S_t\}$, $\Psi \nearrow$.

Rozwiązanie Azémy-Yora - c.d.

- Niech $S_t = \sup_{s \leqslant t} B_s$, $\overline{\mu}(x) = \mu([x, \infty))$
  $T = T_{AY} = \inf\{t \geqslant 0 : \Psi(B_t) = S_t\}$, $\Psi \nearrow$.
- Wtedy $S_T = \Psi(B_T)$, a zatem jeśli $B_T \sim \mu$ to
  $\overline{\nu}(s) = \mathbb{P}(S_T \geqslant s) = \mathbb{P}(B_T \geqslant \Psi^{-1}(s)) = \overline{\mu}(\Psi^{-1}(s))$, gdzie $S_T \sim \nu$.

Rozwiązanie Azémy-Yora - c.d.

- Niech $S_t = \sup_{s \leqslant t} B_s$, $\overline{\mu}(x) = \mu([x, \infty))$
  $T = T_{AY} = \inf\{t \geqslant 0 : \Psi(B_t) = S_t\}$, $\Psi \nearrow$.
- Wtedy $S_T = \Psi(B_T)$, a zatem jeśli $B_T \sim \mu$ to
  $\overline{\nu}(s) = \mathbb{P}(S_T \geqslant s) = \mathbb{P}(B_T \geqslant \Psi^{-1}(s)) = \overline{\mu}(\Psi^{-1}(s))$, gdzie $S_T \sim \nu$.
- Dla $f \in \mathcal{C}^1_b$, $F = \int f$, $M^f_t := F(S_t) - (S_t - B_t)f(S_t)$ jest martyngałem.
  Stosując tw o stopowaniu dla T, $\mathbb{E}F(S_T) = \mathbb{E}[f(S_T)(S_T - \Psi^{-1}(S_T)]$, czyli

$$\text{(dla dowolnego } f\text{)}, \int F(s)d\nu(s) \quad = \quad \int (s - \Psi^{-1}(s))f(s)d\nu(s)$$

$$d\overline{\nu}(s) = -\frac{\overline{\nu}(s)ds}{s - \Psi^{-1}(s)} \quad \text{a zatem} \quad d\overline{\mu}(x) = -\frac{\overline{\mu}(x)}{\Psi(x) - x}d\Psi(x)$$

$$\Psi(x) = \Psi_\mu(x) = \frac{1}{\overline{\mu}(x)} \int_{[x,\infty)} y d\mu(y) \qquad \text{daje} \qquad B_T \sim \mu.$$

Dygresja martyngałowa

Na poprzednim slajdzie widzieliśmy, że dla $f \in \mathcal{C}_b^1$, $F(x) = \int_0^x f(y)dy$,

$$M_t^f := F(S_t) - (S_t - B_t)f(S_t), \quad t \geqslant 0 \textit{ jest martyngałem.}$$

Dygresja martyngałowa

Na poprzednim slajdzie widzieliśmy, że dla $f \in \mathcal{C}_b^1$, $F(x) = \int_0^x f(y)dy$,

$$M_t^f := F(S_t) - (S_t - B_t)f(S_t), \quad t \geqslant 0 \textit{ jest martyngałem.}$$

Niech $f(x) = \mathbf{1}_{x \geqslant \lambda}$, gdzie λ ustalone. Wtedy $F(x) = (x-\lambda)_+$ a zatem

$$\begin{aligned} M_t^f &= (S_t - \lambda)^+ - (S_t - B_t)\mathbf{1}_{S_t \geqslant \lambda} = (B_t - \lambda)\mathbf{1}_{S_t \geqslant \lambda} \\ \text{dla } \tau \text{ m.st} &\Rightarrow \lambda \mathbb{P}(S_\tau \geqslant \lambda) = \mathbb{E}\Big[B_\tau \mathbf{1}_{S_\tau \geqslant \lambda}\Big], \text{ czyli nierówność max Doob'a.} \end{aligned}$$

Dygresja martyngałowa

Na poprzednim slajdzie widzieliśmy, że dla $f \in \mathcal{C}_b^1$, $F(x) = \int_0^x f(y)dy$,

$$M_t^f := F(S_t) - (S_t - B_t)f(S_t), \quad t \geqslant 0 \textit{ jest martyngałem.}$$

Niech $f(x) = \mathbf{1}_{x \geqslant \lambda}$, gdzie λ ustalone. Wtedy $F(x) = (x - \lambda)_+$ a zatem

$$\begin{aligned} M_t^f &= (S_t - \lambda)^+ - (S_t - B_t)\mathbf{1}_{S_t \geqslant \lambda} = (B_t - \lambda)\mathbf{1}_{S_t \geqslant \lambda} \\ \text{dla } \tau \text{ m.st} &\Rightarrow \lambda \mathbb{P}(S_\tau \geqslant \lambda) = \mathbb{E}\Big[B_\tau \mathbf{1}_{S_\tau \geqslant \lambda}\Big], \text{ czyli nierówność max Doob'a.} \end{aligned}$$

Niech $f(x) = px^{p-1}$, $p > 1$. Wtedy $F(x) = x^p$ a zatem

$$\begin{aligned} M_t^f &= S_t^p - pS_t^{p-1}(S_t - B_t) = (1-p)S_t^p - pB_tS_t^{p-1} \\ \mathbb{E}S_\tau^p &= \frac{p-1}{p}\mathbb{E}\Big[B_\tau S_\tau^{p-1}\Big] \leqslant \frac{p-1}{p}\Big(\mathbb{E}|B_\tau|^p\Big)^{1/p}\Big(\mathbb{E}S_\tau^p\Big)^{\frac{p-1}{p}} \\ \Big(\mathbb{E}S_\tau^p\Big)^{1/p} &\leqslant \frac{p-1}{p}\Big(\mathbb{E}|B_\tau|^p\Big)^{1/p} \text{ czyli } L^p - \text{n-ść Doob'a.} \end{aligned}$$

Reprezentowanie procesów

Pokazaliśmy jak zanurzyć miarę probabilistyczną w ruchu Browna. Z niezależności i stacjonarności przyrostów ruchu Browna wynika, że możemy tę procedurę iterować. Widać, że łatwo zanurzymy w ten sposób sumy niezależnych zmienny losowych. Ogólniej, dosyć łatwo widać, że możemy zanurzyć dyskretny martyngał: $(X_k : k \in \mathbb{N})$. Mając zdefiniowane $T_i : t \leqslant k$, kolejny wyraz: T_{k+1} otrzymujemy jako moment stopu, który zanurza (regularny) rozkład warunkowy $\mathcal{L}(X_{k+1}|X_k = B_{T_k})$ w (nowym, niezależnym od przeszłości) ruchu Browna $(B_{T_k+t} - B_{T_k})$. Wtedy $(B_{T_k} : k \in \mathbb{N}) \sim (X_k : k \in \mathbb{N})$.

Reprezentowanie procesów

Pokazaliśmy jak zanurzyć miarę probabilistyczną w ruchu Browna. Z niezależności i stacjonarności przyrostów ruchu Browna wynika, że możemy tę procedurę iterować. Widać, że łatwo zanurzymy w ten sposób sumy niezależnych zmienny losowych. Ogólniej, dosyć łatwo widać, że możemy zanurzyć dyskretny martyngał: $(X_k : k \in \mathbb{N})$. Mając zdefiniowane $T_i : t \leqslant k$, kolejny wyraz: T_{k+1} otrzymujemy jako moment stopu, który zanurza (regularny) rozkład warunkowy $\mathcal{L}(X_{k+1}|X_k = B_{T_k})$ w (nowym, niezależnym od przeszłości) ruchu Browna $(B_{T_k+t} - B_{T_k})$. Wtedy $(B_{T_k} : k \in \mathbb{N}) \sim (X_k : k \in \mathbb{N})$.

Procedura ta, choć nie jest optymalna, pozwala uzyskać wiele własności dla procesów dyskretnych z ich analogonów dla ruchu Browna i była powszechnie stosowana.

Reprezentowanie procesów - c.d.

Co więcej, stosując przejście graniczne można również zanurzać procesy z czasem ciągłym.

W 1978 roku Monroe, stosując właśnie techniki zanurzeń Skorochoda, pokazał, że dla dowolnego semimartyngału $(X_t : t \geqslant 0)$ i ruchu Browna $(B_t : t \geqslant 0)$ istnieje niemalejąca rodzina momentów stopu: $(T_t : t \geqslant 0)$, $T_t \leqslant T_{t+h}$, która zanurza proces X w B: $(B_{T_t} : t \geqslant 0) \sim (X_t : t \geqslant 0)$. (*Uwaga: T_t zrandomizowane.*)

W pewnym sensie na tym można by zakończyć badanie innych procesów niż ruch Browna, gdyby nie fakt, że rodzin stopu T_t nie da się wyznaczyć *explicite*... chyba że ograniczymy się do ciągłych martyngałów (lokalnych).

Dambis-Dubins-Schwarz

Swoistym rozszerzeniem czasów zrównania (jak Azémy-Yora) na rodzinę momentów stopu, są odwrotności procesów rosnących. Jeżeli A_t jest rosnącym procesem, adaptowanym, to jego odwrotność:

$$C_s = \inf\{t \geqslant 0 : A_t > s\},$$

daje rosnącą rodzinę momentów stopu (i na odwrót).

Dambis-Dubins-Schwarz

Swoistym rozszerzeniem czasu zrównania (jak Azémy-Yora) na rodzinę momentów stopu, są odwrotności procesów rosnących. Jeżeli A_t jest rosnącym procesem, adaptowanym, to jego odwrotność:

$$C_s = \inf\{t \geqslant 0 : A_t > s\},$$

daje rosnącą rodzinę momentów stopu.

Okazuje się, że ciągły martyngał lokalny $(M_t : t \geqslant 0)$ jest charakteryzowany przez proces rosnący $\langle M \rangle_t$ taki, że $M_t^2 - \langle M \rangle_t$ jest martyngałem (lokalnym). Oznaczmy przez T_s odwrotność $\langle M \rangle_t$: $T_s = \inf\{t \geqslant 0 : \langle M \rangle_t > s\}$ i zdefiniujmy: $N_s = M_{T_s}$. Jest to oczywiście ciągły martyngał lokalny, ale i więcej...

Dambis-Dubins-Schwarz

Okazuje się, że ciągły martyngał lokalny $(M_t : t \geqslant 0)$ jest charakteryzowany przez proces rosnący $\langle M \rangle_t$ taki, że $M_t^2 - \langle M \rangle_t$ jest martyngałem (lokalnym). Oznaczmy przez T_s odwrotność $\langle M \rangle_t$: $T_s = \inf\{t \geqslant 0 : \langle M \rangle_t > s\}$ i zdefiniujmy: $N_s = M_{T_s}$. Załóżmy, że $\langle M \rangle_\infty = \infty$ p.n.

Wtedy $(N_s : s \geqslant 0)$ jest ruchem Browna oraz $M_t = N_{\langle M \rangle_t}$.

Twierdzenie to wynika z charakteryzacji (P. Lévy) ruchu Browna jako ciągłego martyngału B takiego, że $\langle B \rangle_s = s$. W istocie: rodzina T_s jest rosnącą rodziną momentów stopu oraz $\langle N \rangle_s = \langle M \rangle_{T_s} = s$.

Dambis-Dubins-Schwarz - c.d.

Twierdzenie to daje piękną reprezentację ciągłych martyngałów jako ruch Browna ze zmienionym (explicite) czasem. Pozwala to przenosić wiele rezultatów dla ruchu Browna na wszystkie ciągłe martyngały lokalne.

- I tak na przykład rozwiązania problemu zanurzania Skorochoda omówione wcześniej przepisują się dla dowolnego martyngału ciągłego.

Dambis-Dubins-Schwarz - c.d.

Twierdzenie to daje piękną reprezentację ciągłych martyngałów jako ruch Browna ze zmienionym (explicite) czasem. Pozwala to przenosić wiele rezultatów dla ruchu Browna na wszystkie ciągłe martyngały lokalne.

- I tak na przykład rozwiązania problemu zanurzania Skorochoda omówione wcześniej przepisują się dla dowolnego martyngału ciągłego.
- Dla $H : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mamy, że $H(\sup_{u \leqslant t} B_t, B_t)$ jest martyngałem wtedy i tylko wtedy, gdy $H(\sup_{u \leqslant t} M_u, M_u)$ jest martygnałem lokalnym dla dowolnego ciągłego martyngału M.

Dambis-Dubins-Schwarz - c.d.

Twierdzenie to daje piękną reprezentację ciągłych martyngałów jako ruch Browna ze zmienionym (explicite) czasem. Pozwala to przenosić wiele rezultatów dla ruchu Browna na wszystkie ciągłe martyngały lokalne.

- I tak na przykład rozwiązania problemu zanurzania Skorochoda omówione wcześniej przepisują się dla dowolnego martyngału ciągłego.
- Dla $H : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mamy, że $H(\sup_{u \leqslant t} B_t, B_t)$ jest martyngałem wtedy i tylko wtedy, gdy $H(\sup_{u \leqslant t} M_u, M_u)$ jest martygnałem lokalnym dla dowolnego ciągłego martyngału M.
- Nierówności BDG: $c_p \mathbb{E} T^{p/2} \leqslant \mathbb{E}(sup_{u \leqslant t} |B_u|)^p \leqslant C_p \mathbb{E} T^{p/2}$ są także prawdziwe dla dowolnego martyngału ciągłego.

Dambis-Dubins-Schwarz - c.d.

Twierdzenie to daje piękną reprezentację ciągłych martyngałów jako ruch Browna ze zmienionym (explicite) czasem. Pozwala to przenosić wiele rezultatów dla ruchu Browna na wszystkie ciągłe martyngały lokalne.

- I tak na przykład rozwiązania problemu zanurzania Skorochoda omówione wcześniej przepisują się dla dowolnego martyngału ciągłego.
- Dla $H : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mamy, że $H(\sup_{u \leqslant t} B_t, B_t)$ jest martyngałem wtedy i tylko wtedy, gdy $H(\sup_{u \leqslant t} M_u, M_u)$ jest martygnałem lokalnym dla dowolnego ciągłego martyngału M.
- Nierówności BDG: $c_p \mathbb{E} T^{p/2} \leqslant \mathbb{E}(sup_{u \leqslant t} |B_u|)^p \leqslant C_p \mathbb{E} T^{p/2}$ są także prawdziwe dla dowolnego martyngału ciągłego.
- itp....

Subordynacja

Dla procesów, które nie są ciągłymi martyngałami w zasadzie nie znamy podobnych technik. Jednym z nielicznych pomysłów jakie nam pozostają to stosowanie niezależnych zmian czasu. Mamy zatem ruch Browna $B = (B_t : t \geqslant 0)$ oraz niezależny proces rosnący $A = (A_t : t \geqslant 0)$ i możemy definiować proces subordynowany: $X_t = B_{A_t}$.

Dla przykładu: jeśli A_t jest α - stabilny, czyli $\mathbb{E}\exp(i\lambda A_t) = \exp(-|\lambda|^\alpha)$, to proces X jest 2α - stabilny:

$$\mathbb{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda X_t} = \mathbb{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda B_{A_t}} = \mathbb{E}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{2}A_t} = \mathrm{e}^{-2^{-\alpha}\lambda^{2\alpha}}.$$

Jednakże poza prostymi przykładami trudno jest wymyślić proces A, który da nam oczekiwany proces X. Ciekawe są również pytania odwrotne: mając X odgadnąć z jakiej pary procesów go otrzymano, ale to już inna historia...