W poszukiwaniu kształtów kulistych

Piotr Mankiewicz

April 4, 2005

Konwersatorium dla doktorantów

Notacje 1

Cialo wypukle - wypukly, domknięty podzbiór ograniczony w $\mathbf{R}^n$.

Odleglość geometryczna dwóch cial $A, B \subset \mathbf{R}^n$

$$d_g(A,B) = \inf\{t_1/t_2 \mid t_2 A \subset B \subset t_1 B, \quad t_1, t_2 > 0\},$$

a ich odleglość Banacha-Mazura

$$d(A,B) = \inf\{d_g(A, T(B)) \mid T \text{ jest odwracalnym operatorem liniowym z } \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^n}\}.$$

Uwaga: To nie są metryki!!! Stają sie nimi dopiero po zlogarytmowaniu! Nierówności trójkąta są multiplikatywne. Tzn. dla każdego ciala C mamy

$$d(A,B) \leq d(A,C)d(C,B) \quad \text{i} \quad d(A,A) = 1.$$

Będziemy się zajmować **wylącznie** cialami symetrycznymi; tzn. takimi że $A = -A$.

Przyklady: Kula euklidesowa w $\mathbf{R}^n$, kule jednostkowe B_p^n w l_p^n dla $1 \leq p \leq \infty$.

Notacje 2

Polarem symetrycznego, wypuklego ciala $B \subset \mathbf{R}^n$ nazywamy zbiór

$$B^o = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \; | < x, y > | \leq 1 \text{ for every } y \in B\}.$$

Przyklady:
$(tA)^o = t^{-1}A^o$, $A \subset B$ pociąga $B^o \subset A^o$,

$(B_p^n)^o = B_{p'}^n$, dla $p \in [1, \infty]$, gdzie $p' = p/(p-1)$.

Grassmannian $G_{n,k}$ - jest to zbiór wszystkich k-wymiarowych podprzestrzeni liniowych w $\mathbf{R}^n$ wyposażony w (naturalną) miarę unormowaną.

Jeżeli $T : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^n}$ jest izomorfizmem liniowym to $T(B)$ nazywamy (inną) pozycją tego ciala.

Latwa część Twierdzenia Fritza Johna

Twierdzenie 1. Dla każdego symetrycznego ciala wypuklego B w $\mathbf{R^n}$ istnieje dokladnie jedna elipsoida $\mathcal{E}$ minimalnej (dualnie maksymalnej) objętości zwierająca B (zawarta w B). Co wiecej,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\mathcal{E} \subset B \ (\subset \mathcal{E}) \quad \text{(dualnie} \quad \mathcal{E} \subset B \subset \sqrt{n}\mathcal{E}),$$

co znaczy, że $d_g(\mathcal{E}, B) \leq \sqrt{n}$.

Biorąc odpowiednie przekształcenie liniowe $T : \mathcal{E} \to B_2^n$ otrzymujemy, że dla $\tilde{B} = T(B)$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} B_2^n \subset \tilde{B} \subset B_2^n$$

i podobnie w dualnym przypadku.

Wniosek: (i) Dla każdego ciala B w $\mathbf{R^n}$ mamy $d(B, B_2^n) \leq \sqrt{n}$, zatem
(ii) dla dowolnych A, B w $\mathbf{R^n}$ mamy $d(A, B) \leq n$.

Zasada "kurczenia się" średnic rzutów (The Shrinking Principle)

Fakt. Dla dowolnego symetrycznego ciala wypuklego B i "typowej" podprzestrzeni $H \in G_{n,k}$ mamy

$$\text{średnica } P_H(B) \leq C_1 \sqrt{k/n} \text{ średnica } B$$

dla $M^*(B) \leq k \leq n$.

"Typowa" - znaczy miara takich H jest eksponencjalnie bliska jedynki ($\geq 1 - \exp -k$),
$M^*(B)$ oznacza największy taki wymiar, że typowy rzut jest już kulisty, a
$C_1 > 1$ jest stalą numeryczną.

Analogiczny fakt zachodzi przez dualność (polarność) dla typowych przkrojów które rosną wraz z maleniem wymiarów.

Izomorficzne, losowe, skończenie–wymiarowe Twierdzenie Dvoretzkiego

Tw.2. (A. Litvak & P.M. & N. Tomczak-Jaegermann) Dla każdego ciala $B \subset \mathbf{R^n}$ dla którego B_2^n jest elipsoidą minimalnej objętości i dla każdego $M^*(B) \leq k \leq n$ mamy

$$c\sqrt{\log(n/k)/n}P_H(B_2^n) \subset P_H(B) \subset C\sqrt{k/n}P_H(B_2^n)$$

dla rzutów ortogonalnych P_H na "typowe podprzestrzenie" $H \in G_{n.k}$ gdzie $0 < c < 1 < C$ oznaczają stale numeryczne (tzn. niezależne od n, k i B).

Uwaga 1. Oczywiście prawdziwa jest także dualna wersja tego twierdzenia (dla przekrojów).

Uwaga 2. Z Tw. 2 formalnie wynika, że

$$M^*(B) \geq c' \log n.$$

Nierównosć Santaló

Twierdzenie 3. Dla każdego ciala wypuklego $B \subset \mathbf{R^n}$

$$c' \leq \left(\frac{\mathrm{vol}\,(B)\,\mathrm{vol}\,(B^o)}{\mathrm{vol}\,(B_2^n)^2} \right)^{1/n} \leq C',$$

gdzie $0 < c' \leq C'$ są stalymi numerycznymi.

Uwaga. Można pokazać, że $c' < C' = 1$.

Definicja. (Wewnętrzny i zewnętrzny "volume ratio")
Niech $\mathcal{E}$ będzie elipsoidą a B cialem, $\mathcal{E}, B \subset \mathbf{R^n}$.

(i) Jeżeli $\mathcal{E} \subset B$, to definiujemy

$$\mathrm{vr}\,(B, \mathcal{E}) = (\mathrm{vol}\,(B) / \mathrm{vol}\,(\mathcal{E}))^{1/n}.$$

(ii) Jeżeli $B \subset \mathcal{E}$, to definiujemy

$$\mathrm{Vr}\,(B, \mathcal{E}) = (\mathrm{vol}\,(\mathcal{E}/vol(B))^{1/n}.$$

Wnioskowanie z objętości (Volume Ratio Argument; inner and outer case)

Twierdzenie 4. Jeżeli cialo $B \subset \mathbf{R^n}$ zawiera λB_2^n, to dla typowej podprzestrzeni $E \in G_{n,k}$, gdzie $k = \delta n$, mamy

$$\lambda B_2^n \cap E \subset B \cap E \subset (C \, \mathrm{vr}\,(B, B_2^n))^{1/1-\delta} \lambda B_2^n \cap E,$$

co znaczy $d_g(B \cap E, B_2^n \cap E) \leq (C \, \mathrm{vr}\,(B, B_2^n))^{1/1-\delta}$.

Dualnie

Twierdzenie 5. Jeżeli λB_2^n zawiera cialo B, to dla typowej podprzestrzeni $E \in G_{n,k}$, gdzie $k = \delta n$, mamy

$$\lambda (C \, \mathrm{Vr}\,(B, \lambda B_2^n))^{1/1-\delta} P_H(B_2^n) \subset P_H(B) \subset \lambda P_E(B_2^n,$$

co znaczy $d_g(B, P_H(B_2^n)) \leq (C \, \mathrm{Vr}\,(B, B_2^n))^{1/1-\delta}$.

Przyklady . . .

Elipsoida Milmana

Definicja. Mówimy, że elipsoida $\mathcal{E}_B \subset \mathbf{R^n}$ jest elipsoidą Milmana (M-elipsoidą) dla symetrycznego, wypuklego ciala $B \subset \mathbf{R^n}$ (z parametrem C), jeżeli są spelnione obie nierówności:

$$\left(\frac{\mathrm{vol}\,(B+\mathcal{E}_B)}{\mathrm{vol}\,(B\cap\mathcal{E}_B)}\right)^{1/n} \leq C$$

$$\left(\frac{\mathrm{vol}\,(B^o+\mathcal{E}_B^o)}{\mathrm{vol}\,(B^o\cap\mathcal{E}_B^o)}\right)^{1/n} \leq C,$$

gdzie "$+$" oznacza sumę Minkowskiego,

$$A+B=\{x+y \mid x\in A \text{ i } y\in B\}.$$

Twierdzenie 6. (V. Milman) Istnieje stala numeryczna $C_0 \geq 1$ taka, że dla każdego $n \geq 1$ i dla każdego symetrycznego wypuklego ciala $B \subset \mathbf{R^n}$ istnieje M-elipsoidsa z parametrem C_0.

Mówimy, że B jest w M-pozycji, gdy B_2^n jest M-elipsoidą dla B (z parametrem C_0).

Wlasności elipsoidy Milmana

Bezpośrednio z definicji wynika, że

$$C_0^{-1} \leq \mathrm{vol}\, B / \mathrm{vol}\, \mathcal{E}_B \leq C_0 \quad \text{oraz}$$

$$C_0^{-1} \leq \mathrm{vol}\, B^o / \mathrm{vol}\, \mathcal{E}_B^o \leq C_0. \quad \text{Ponadto,}$$

(*) $$\mathcal{E}_{B^o} = (\mathcal{E}_B)^o.$$

Twierdzenie 7. Dla każdego $\delta > 0$ istnieje $C = C(\delta)$ taka, że dla każdego $n \in \mathbf{N}$ i dla każdego ciala $B \subset \mathbf{R^n}$ i jego M-elipsoidy $\mathcal{E}_B$ oraz dla każdej n–wymiarowej podprzestrzeni $H \subset \mathbf{R^n}$ wymiaru $k = \delta n$, mamy

$$C(\delta)^{-1} \leq (\mathrm{vol}\, P_H(K) / \mathrm{vol}\, P_H(\mathcal{E}_B))^{-1/k} \leq C(\delta)$$

$$C(\delta)^{-1} \leq (\mathrm{vol}\,(H \cap K) / \mathrm{vol}\,(H \cap \mathcal{E}_B))^{-1/k} \leq C(\delta),$$

dla K będącym dowolnym zbiorem z listy: $B + \mathcal{E}_B$, $B \cap \mathcal{E}_B, B$.

Uwaga. Na mocy (*), podobne nierówności zachodzą dla B^o i $\mathcal{E}_{B^o}$.

Twierdzenie Milmana o przekrojach rzutów (Subspace of a Quotient Theorem)

Theorem 8 (V, Milman). Dla każdej pary $0 < \delta_1 < \delta_2 < 1$ istnieje stala $C(\delta_1, \delta_2) > 1$ taka, że dla każdego $n \in \mathbf{N}$ i dla każdego symetrycznego, wypuklego ciala $B \subset \mathbf{R^n}$ w M– pozycji mamy:

(**) "typowy" $[\delta_1]$–wymiarowy przekrój "typowego" $[\delta_2]$-wymiarowego rzutu ortogonalnego jest $C(\delta_1, \delta_2)$–kulisty.