Wielowymiarowe rozmaitości Calabiego-Yau typu Borcea-Voisin

Dominik Burek

Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego

dominik.burek@uj.edu.pl

2 czerwca, 2022

Definicja

Rozmaitością Calabiego-Yau wymiaru d nazywamy zespoloną, gładką, rzutową rozmaitość algebraiczną X, która spełnia następujące warunki:

1. $K_X = \mathcal{O}_X$,
2. $H^i\mathcal{O}_X = 0$ dla $0 < i < d$.

Równoważnie:

1. istnieje nigdzie nieznikająca d–forma na X,
2. nie istnieje globalna holomorficzna i–forma na X.

Rozmaitości Calabiego-Yau

Definicja

Rozmaitością Calabiego-Yau wymiaru d nazywamy zespoloną, gładką, rzutową rozmaitość algebraiczną X, która spełnia następujące warunki:

1. $K_X = \mathcal{O}_X$,
2. $H^i\mathcal{O}_X = 0$ dla $0 < i < d$.

Równoważnie:

1. istnieje nigdzie nieznikająca d–forma na X,
2. nie istnieje globalna holomorficzna i–forma na X.

Najważniejsze niezmienniki rozmaitości rzutowych

1. Charakterystyka Eulera $e(X)$,
2. Liczby Bettiego $b_i := \dim H^i(X, \mathbb{Q})$ dla $0 \leqslant i \leqslant 2d$,
3. Liczby Hodge'a $h^{i,j} := \dim H^j \Omega^i_X$ dla $0 \leqslant i, j \leqslant d$, tworzące *diament Hodge'a:*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & h^{0,0} & & & \\ & & h^{1,0} & & h^{0,1} & & \\ & h^{2,0} & & h^{1,1} & & h^{0,2} & \\ h^{3,0} & & h^{2,1} & & h^{1,2} & & h^{0,3} \\ & h^{3,1} & & h^{2,2} & & h^{1,3} & \\ & & h^{3,2} & & h^{2,3} & & \\ & & & h^{3,3} & & & \end{array}$$

Diament Hodge'a w wymiarze $d = 3$

Najważniejsze niezmienniki rozmaitości rzutowych

1. Charakterystyka Eulera $e(X)$,
2. Liczby Bettiego $b_i := \dim H^i(X, \mathbb{Q})$ dla $0 \leqslant i \leqslant 2d$,
3. Liczby Hodge'a $h^{i,j} := \dim H^j \Omega^i_X$ dla $0 \leqslant i, j \leqslant d$, tworzące *diament Hodge'a:*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & h^{0,0} & & & \\ & & h^{1,0} & & h^{0,1} & & \\ & h^{2,0} & & h^{1,1} & & h^{0,2} & \\ h^{3,0} & & h^{2,1} & & h^{1,2} & & h^{0,3} \\ & h^{3,1} & & h^{2,2} & & h^{1,3} & \\ & & h^{3,2} & & h^{2,3} & & \\ & & & h^{3,3} & & & \end{array}$$

Diament Hodge'a w wymiarze $d = 3$

Najważniejsze niezmienniki rozmaitości rzutowych

1. Charakterystyka Eulera $e(X)$,
2. Liczby Bettiego $b_i := \dim H^i(X, \mathbb{Q})$ dla $0 \leqslant i \leqslant 2d$,
3. Liczby Hodge'a $h^{i,j} := \dim H^j \Omega_X^i$ dla $0 \leqslant i, j \leqslant d$, tworzące *diament Hodge'a*:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & h^{0,0} & & & \\
 & & h^{1,0} & & h^{0,1} & & \\
 & h^{2,0} & & h^{1,1} & & h^{0,2} & \\
h^{3,0} & & h^{2,1} & & h^{1,2} & & h^{0,3} \\
 & h^{3,1} & & h^{2,2} & & h^{1,3} & \\
 & & h^{3,2} & & h^{2,3} & & \\
 & & & h^{3,3} & & &
\end{array}
$$

Diament Hodge'a w wymiarze $d = 3$

Niezmienniki rozmaitości Calabiego-Yau

W przypadku rozmaitości Calabiego-Yau wymiaru d zachodzą równości:

$$h^{0,0} = h^{0,d} = h^{d,0} = h^{d,d} = 1,$$
$$h^{i,0} = h^{0,i} = 0 \quad \text{dla} \quad 0 < i < d.$$

			1			
		0		0		
	0		$h^{1,1}$		0	
1		$h^{2,1}$		$h^{1,2}$		1
	0		$h^{2,2}$		0	
		0		0		
			1			

Diament Hodge'a CY3

Niezmienniki rozmaitości Calabiego-Yau

W przypadku rozmaitości Calabiego-Yau wymiaru d zachodzą równości:

$$h^{0,0} = h^{0,d} = h^{d,0} = h^{d,d} = 1,$$
$$h^{i,0} = h^{0,i} = 0 \quad \text{dla} \quad 0 < i < d.$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & 0 & & h^{1,1} & & 0 & \\ 1 & & h^{2,1} & & h^{1,2} & & 1 \\ & 0 & & h^{2,2} & & 0 & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & & & 1 & & & \end{array}$$

Diament Hodge'a CY3

Znaczenie w nauce

- *Krzywe eliptyczne* – jednowymiarowe rozmaitości Calabiego-Yau, odegrały kluczową rolę przy dowodzie *Wielkiego Twierdzenia Fermata* z 1637 roku, które głosi że dla $n > 2$ równanie $a^n + b^n = c^n$ nie posiada rozwiązań w liczbach całkowitych $a, b, c \neq 0$. W 1993 roku A. Wiles dowodząc hipotezy Taniyamy-Shimury-Weila o modularności krzywych eliptycznych, dowiódł tym samym Wielkie Twierdzenie Fermata. Fundamentalne znaczenie w kryptografii.
- *Teoria strun:* przypuszczenie że przestrzeń w której żyjemy jest dziesięciowymiarowa i "kompaktyfikuje" się do iloczynu $M^4 \times X$ "zwykłej" czasoprzestrzeni Minkowskiego M^4 oraz rozmaitości Calabiego-Yau wymiaru 6 (o średnicy rzędu stałej Plancka).

Znaczenie w nauce

- *Krzywe eliptyczne* – jednowymiarowe rozmaitości Calabiego-Yau, odegrały kluczową rolę przy dowodzie *Wielkiego Twierdzenia Fermata* z 1637 roku, które głosi że dla $n > 2$ równanie $a^n + b^n = c^n$ nie posiada rozwiązań w liczbach całkowitych $a, b, c \neq 0$. W 1993 roku A. Wiles dowodząc hipotezy Taniyamy-Shimury-Weila o modularności krzywych eliptycznych, dowiódł tym samym Wielkie Twierdzenie Fermata. Fundamentalne znaczenie w kryptografii.
- *Teoria strun:* przypuszczenie że przestrzeń w której żyjemy jest dziesięciowymiarowa i "kompaktyfikuje" się do iloczynu $M^4 \times X$ "zwykłej" czasoprzestrzeni Minkowskiego M^4 oraz rozmaitości Calabiego-Yau wymiaru 6 (o średnicy rzędu stałej Plancka).

Znaczenie w nauce

- *Krzywe eliptyczne* – jednowymiarowe rozmaitości Calabiego-Yau, odegrały kluczową rolę przy dowodzie *Wielkiego Twierdzenia Fermata* z 1637 roku, które głosi że dla $n > 2$ równanie $a^n + b^n = c^n$ nie posiada rozwiązań w liczbach całkowitych $a, b, c \neq 0$. W 1993 roku A. Wiles dowodząc hipotezy Taniyamy-Shimury-Weila o modularności krzywych eliptycznych, dowiódł tym samym Wielkie Twierdzenie Fermata. Fundamentalne znaczenie w kryptografii.
- *Teoria strun:* przypuszczenie że przestrzeń w której żyjemy jest dziesięciowymiarowa i “kompaktyfikuje” się do iloczynu $M^4 \times X$ “zwykłej” czasoprzestrzeni Minkowskiego M^4 oraz rozmaitości Calabiego-Yau wymiaru 6 (o średnicy rzędu stałej Plancka).

Znaczenie w nauce

- *Krzywe eliptyczne* – jednowymiarowe rozmaitości Calabiego-Yau, odegrały kluczową rolę przy dowodzie *Wielkiego Twierdzenia Fermata* z 1637 roku, które głosi że dla $n > 2$ równanie $a^n + b^n = c^n$ nie posiada rozwiązań w liczbach całkowitych $a, b, c \neq 0$. W 1993 roku A. Wiles dowodząc hipotezy Taniyamy-Shimury-Weila o modularności krzywych eliptycznych, dowiódł tym samym Wielkie Twierdzenie Fermata. Fundamentalne znaczenie w kryptografii.
- *Teoria strun:* przypuszczenie że przestrzeń w której żyjemy jest dziesięciowymiarowa i "kompaktyfikuje" się do iloczynu $M^4 \times X$ "zwykłej" czasoprzestrzeni Minkowskiego M^4 oraz rozmaitości Calabiego-Yau wymiaru 6 (o średnicy rzędu stałej Plancka).

Znaczenie w nauce

- *Hipoteza Symetrii Lustrzanej* – jeden z najważniejszych problemów matematycznych inspirowany fizyką teoretyczną. W najprostszej wersji problem można sformułować następująco:

Hipoteza Symetrii Lustrzanej

Dla dowolnej trójwymiarowej rozmaitości Calabiego-Yau X istnieje trójwymiarowa rozmaitość Calabiego-Yau Y taka, że

$$h^{1,1}(X) = h^{1,2}(Y) \quad \text{oraz} \quad h^{1,2}(X) = h^{1,1}(Y).$$

Konstrukcja Cynka i Hulka

Niech $\mathbb{Z}_d$ będzie grupą cykliczną rzędu d.

Twierdzenie (Cynk-Hulek)

Niech E_d będzie krzywą eliptyczną z automorfizmem $\phi_d \colon E_d \longrightarrow E_d$, rzędu $d = 2, 3, 4$. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, grupa

$$G_{d,n} := \{(m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}_d^n \colon m_1 + m_2 + \ldots + m_n = 0\} \simeq \mathbb{Z}_d^{n-1}$$

działa na E_d^n przez $\phi_d^{m_i}$ na i-tej współrzędnej. Wówczas istnieje krepantne rozwiązanie osobliwości

$$X_{d,n} := \widetilde{E_d^n / G_{d,n}} \longrightarrow E_d^n / G_{d,n}.$$

W szczególności $X_{d,n}$ jest rozmaitością Calabiego-Yau wymiaru n.

S. Cynk, K. Hulek, *Higher-dimensional modular Calabi-Yau manifolds*, Canad. Math. Bull. **50** (2007), 486–503.

W ramach mojej pracy doktorskiej, w artykule

D. Burek, *Higher dimensional Calabi-Yau manifolds of Kummer type*, Math. Nachr. **293** (2020), 638-650.

udowodniłem, że w brakującym przypadku $d = 6$, konstrukcja Cynka-Hulka również zadaje n-wymiarowe rozmaitości Calabiego-Yau $X_{6,n}$. Użyłem w tym celu technikę rozwiązań torycznych oraz korespondencji McKaya.

Wykorzystując rozmaitości $X_{d,n}$ uogólniłem konstrukcję Katsury-Schütta z pracy

T. Katsura, M. Schütt *Zariski K3 surfaces*, Rev. Mat. Iberoam. **36** (2019), 869–894.

uzyskując

Twierdzenie

W charakterystyce $p > 2$ i $p \not\equiv 1 \pmod{12}$ istnieje dowolnie wymiarowa rozmaitość Calabiego-Yau Zariskiego.

W ramach mojej pracy doktorskiej, w artykule

D. Burek, *Higher dimensional Calabi-Yau manifolds of Kummer type*, Math. Nachr. **293** (2020), 638-650.

udowodniłem, że w brakującym przypadku $d = 6$, konstrukcja Cynka-Hulka również zadaje n-wymiarowe rozmaitości Calabiego-Yau $X_{6,n}$. Użyłem w tym celu technikę rozwiązań torycznych oraz korespondencji McKaya.

Wykorzystując rozmaitości $X_{d,n}$ uogólniłem konstrukcję Katsury-Schütta z pracy

T. Katsura, M. Schütt *Zariski K3 surfaces*, Rev. Mat. Iberoam. **36** (2019), 869–894.

uzyskując

Twierdzenie

W charakterystyce $p > 2$ i $p \not\equiv 1 \pmod{12}$ istnieje dowolnie wymiarowa rozmaitość Calabiego-Yau Zariskiego.

W ramach mojej pracy doktorskiej, w artykule

D. Burek, *Higher dimensional Calabi-Yau manifolds of Kummer type*, Math. Nachr. **293** (2020), 638-650.

udowodniłem, że w brakującym przypadku $d = 6$, konstrukcja Cynka-Hulka również zadaje n-wymiarowe rozmaitości Calabiego-Yau $X_{6,n}$. Użyłem w tym celu technikę rozwiązań torycznych oraz korespondencji McKaya.
Wykorzystując rozmaitości $X_{d,n}$ uogólniłem konstrukcję Katsury-Schütta z pracy

T. Katsura, M. Schütt *Zariski K3 surfaces*, Rev. Mat. Iberoam. **36** (2019), 869–894.

uzyskując

Twierdzenie

W charakterystyce $p > 2$ i $p \not\equiv 1 \pmod{12}$ istnieje dowolnie wymiarowa rozmaitość Calabiego-Yau Zariskiego.

Formuła orbifoldowa

Niech G będzie grupą skończona działającą na rozmaitości rzutowej X.

Definicja

Dla rozmaitości ilorazowej ${}^{X}/_{G}$ definiujemy kohomologię Chena-Ruana następująco

$$H^{i,j}_{\mathrm{orb}}\left({}^{X}/_{G}\right) := \bigoplus_{[g]\in \mathrm{Conj}(G)} \left(\bigoplus_{U\in\Lambda(g)} H^{i-\mathrm{age}(g),\, j-\mathrm{age}(g)}(U) \right)^{\mathrm{C}(g)},$$

gdzie $\mathrm{Conj}(G)$ oznacza zbiór klas sprzężeń w G (wybieramy reprezentanta g każdej klasy), $\mathrm{C}(g)$ jest centralizatorem g, $\Lambda(g)$ oznacza zbiór nierozkładalnych składowych zbioru punktów stałych $g \in G$ natomiast $\mathrm{age}(g)$ jest wiekiem macierzy linearyzacji działania g wzdłuż punktów U.
Wymiar $H^{i,j}_{\mathrm{orb}}\left({}^{X}/_{G}\right)$ oznaczamy przez $h^{i,j}_{\mathrm{orb}}\left({}^{X}/_{G}\right)$.

W. Chen, Y. Ruan, *A new cohomology theory of orbifold*, Comm. Math. Phys. **248(1)**, 1–31, 2004.

Formuła orbifoldowa

Twierdzenie (Yasuda)

Niech G będzie skończoną grupą działającą na gładkiej rozmaitości algebraicznej X. Jeśli istnieje krepantne rozwiązanie osobliwości $\widetilde{X/G}$ rozmaitości X/G, wtedy

$$h^{i,j}\left(\widetilde{X/G}\right) = h^{i,j}_{\mathrm{orb}}\left(X/G\right).$$

T. Yasuda, *Twisted jets, motivic measure and orbifold cohomology*, Compos. Math. **140** (2004), 396–422.

Konstrukcja Borcea-Voisin

Twierdzenie (Borcea, Voisin, Cattaneo-Garbagnati)

Niech S_d oznacza powierzchnię $K3$ posiadającą czysto niesymplektyczny automorfizm α_S rzędu $d = 2, 3, 4, 6$. Niech E_d będzie krzywą eliptyczną posiadającą automorfizm α_{E_d} rzędu d. Wtedy $S_d \times E_d / \alpha_{S_d} \times \alpha_{E_d}^{d-1}$, posiada krepantne rozwiązanie osobliwości $\widetilde{S_d \times E_d / \alpha_{S_d} \times \alpha_{E_d}^{d-1}}$. W szczególności $\widetilde{S_d \times E_d / \alpha_{S_d} \times \alpha_{E_d}^{d-1}}$ jest trójwymiarową rozmaitością Calabiego-Yau.

- C. Voisin, *Miroirs et involutions sur les surfaces $K3$*, Astérisque, (218):273–323, 1993. Journées de Géométrie Algébrique d'Orsay (Orsay, 1992).
- C. Borcea, *$K3$ surfaces with involution and mirror pairs of Calabi-Yau manifolds*, Mirror symmetry, II, 717–743, AMS/IP Stud. Adv. Math. 1, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1997.
- A. Cattaneo, A. Garbagnati, *Calabi-Yau 3-folds of Borcea-Voisin type and elliptic fibrations*, Tohoku Math. J. **68** (2016), no. 4, 515–558.

Uogólnienie konstrukcji Borcea-Voisin

W ramach mojej pracy doktorskiej zaproponowałem następujące uogólnienie konstrukcji Borcea-Voisin.

D. Burek, *L-functions of higher dimensional Calabi-Yau manifolds of Borcea-Voisin type*, arXiv preprint, https://arxiv.org/pdf/2107.04104.pdf

Niech X_i będzie rozmaitością typu Calabiego-Yau wraz z czysto niesymplektycznym automorfizmem $\phi_{i,d}\colon X_i \to X_i$ rzędu d dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Rozważmy grupę

$$G_{d,n} := \{(m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}_d^n \colon m_1 + m_2 + \ldots + m_n = 0\} \simeq \mathbb{Z}_d^{n-1}$$

działającą na $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ przez $\phi_{i,d}^{m_i}$ na i-tej współrzędnej. W pracy doktorskiej podałem warunki na składowe zbioru punktów stałych działania (Propozycja 3.2.2) gwarantujące istnienie rozwiązania krepantnego rozmaitości ilorazowej

$$\mathcal{X}_{d,n} := X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n / \mathbb{Z}_d^{n-1}.$$

Uogólnienie konstrukcji Borcea-Voisin

W ramach mojej pracy doktorskiej zaproponowałem następujące uogólnienie konstrukcji Borcea-Voisin.

D. Burek, *L-functions of higher dimensional Calabi-Yau manifolds of Borcea-Voisin type*, arXiv preprint, https://arxiv.org/pdf/2107.04104.pdf

Niech X_i będzie rozmaitością typu Calabiego-Yau wraz z czysto niesymplektycznym automorfizmem $\phi_{i,d}\colon X_i \to X_i$ rzędu d dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Rozważmy grupę

$$G_{d,n} := \{(m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}_d^n : m_1 + m_2 + \ldots + m_n = 0\} \simeq \mathbb{Z}_d^{n-1}$$

działającą na $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ przez $\phi_{i,d}^{m_i}$ na i-tej współrzędnej. W pracy doktorskiej podałem warunki na składowe zbioru punktów stałych działania (Propozycja 3.2.2) gwarantujące istnienie rozwiązania krepantnego rozmaitości ilorazowej

$$\mathcal{X}_{d,n} := X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n / \mathbb{Z}_d^{n-1}.$$

Uogólnienie konstrukcji Borcea-Voisin

W ramach mojej pracy doktorskiej zaproponowałem następujące uogólnienie konstrukcji Borcea-Voisin.

D. Burek, *L-functions of higher dimensional Calabi-Yau manifolds of Borcea-Voisin type*, arXiv preprint, https://arxiv.org/pdf/2107.04104.pdf

Niech X_i będzie rozmaitością typu Calabiego-Yau wraz z czysto niesymplektycznym automorfizmem $\phi_{i,d}\colon X_i \to X_i$ rzędu d dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Rozważmy grupę

$$G_{d,n} := \{(m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}_d^n \colon m_1 + m_2 + \ldots + m_n = 0\} \simeq \mathbb{Z}_d^{n-1}$$

działającą na $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ przez $\phi_{i,d}^{m_i}$ na i-tej współrzędnej. W pracy doktorskiej podałem warunki na składowe zbioru punktów stałych działania (Propozycja 3.2.2) gwarantujące istnienie rozwiązania krepantnego rozmaitości ilorazowej

$$\mathcal{X}_{d,n} := X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \big/ \mathbb{Z}_d^{n-1}.$$

Liczby Hodge'a

Do wyznaczenia liczb Hodge'a rozmaitości $\widetilde{\mathcal{X}_{d,n}}$ używam następujących "wielomianów Poincaré":

$$F_{X_i,m_i,j}(X,Y) = \sum_{\lambda_i \geqslant 0} \sum_{0 \leqslant p,q \leqslant \dim X_i} \dim_{\mathbb{C}} \left(H^{p,q}\left(X_{i,m_i,\lambda_i}\right)_{\zeta_d^j} \right) X^{p+\lambda_i} Y^{q+\lambda_i},$$

gdzie

$$X_{i,m_i,\lambda_i} = \left\{ x \in \mathrm{Fix}\left(\phi_{i,d}^{m_i}\right) : \ \mathrm{age}\left(\phi_{i,d}^{m_i}\right) = \frac{m_i}{d} + \lambda_i \ \text{ wzdłuż } x \right\}$$

Twierdzenie (2.3.3)

Załóżmy, że istnieje krepantne rozwiązanie osobliwości $\widetilde{\mathcal{X}_{d,n}}$, wtedy

$$h^{p,q}(\widetilde{\mathcal{X}_{d,n}}) = \sum_{j=0}^{d-1} \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{d-1} \sqrt[d]{(XY)^k} \cdot F_{X_i,k,j} \right) [X^p Y^q].$$

Do wyznaczenia liczb Hodge'a rozmaitości $\widetilde{\mathcal{X}_{d,n}}$ używam następujących "wielomianów Poincaré":

$$F_{X_{i,m_i,j}}(X,Y) = \sum_{\lambda_i \geqslant 0} \sum_{0 \leqslant p,q \leqslant \dim X_i} \dim_{\mathbb{C}} \left(H^{p,q}\left(X_{i,m_i,\lambda_i}\right)_{\zeta_d^j} \right) X^{p+\lambda_i} Y^{q+\lambda_i},$$

gdzie

$$X_{i,m_i,\lambda_i} = \left\{ x \in \operatorname{Fix}\left(\phi_{i,d}^{m_i}\right) : \operatorname{age}\left(\phi_{i,d}^{m_i}\right) = \frac{m_i}{d} + \lambda_i \ \text{ wzdłuż } x \right\}$$

Twierdzenie (2.3.3)

Załóżmy, że istnieje krepantne rozwiązanie osobliwości $\widetilde{\mathcal{X}_{d,n}}$, wtedy

$$h^{p,q}(\widetilde{\mathcal{X}_{d,n}}) = \sum_{j=0}^{d-1} \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{d-1} \sqrt[d]{(XY)^k} \cdot F_{X_{i,k,j}} \right) [X^p Y^q].$$

$k \backslash j$	0	1	$\cdots$	j	$\cdots$	$d-1$
0	$F_{X_i,0,0}$	$F_{X_i,0,1}$		$F_{X_i,0,j}$		$F_{X_i,0,d-1}$
1	$F_{X_i,1,0}$	$F_{X_i,1,1}$		$F_{X_i,1,j}$		$F_{X_i,1,d-1}$
2	$F_{X_i,2,0}$	$F_{X_i,2,1}$	$\cdots$	$F_{X_i,2,j}$	$\cdots$	$F_{X_i,2,d-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$d-1$	$F_{X_i,d-1,0}$	$F_{X_i,d-1,1}$		$F_{X_i,d-1,j}$		$F_{X_i,d-1,d-1}$

Liczby Hodge'a

$k \backslash j$	0	1	$\cdots$	j	$\cdots$	$d-1$
0	$F_{X_i,0,0}$	$F_{X_i,0,1}$		$F_{X_i,0,j}$		$F_{X_i,0,d-1}$
1	$F_{X_i,1,0}$	$F_{X_i,1,1}$		$F_{X_i,1,j}$		$F_{X_i,1,d-1}$
2	$F_{X_i,2,0}$	$F_{X_i,2,1}$	$\cdots$	$F_{X_i,2,j}$	$\cdots$	$F_{X_i,2,d-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$d-1$	$F_{X_i,d-1,0}$	$F_{X_i,d-1,1}$		$F_{X_i,d-1,j}$		$F_{X_i,d-1,d-1}$

$$\mathrel{=}: \upsilon_{X_i,j}$$

Liczby Hodge'a

Aby obliczyć $h^{p,q}(\widetilde{\mathcal{X}_{d,n}})$ wystarczy obliczyć iloczyn skalarny wektora $v_{X_{i,j}}$ z

$$v_d := \left(1, \sqrt[d]{(XY)}, \sqrt[d]{(XY)^2}, \ldots, \sqrt[d]{(XY)^{d-1}}\right)$$

for $1 \leqslant j \leqslant n$. Następnie mnożymy wszystkie wartości $v_{X_{i,j}} \circ v_d$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ i dodajemy wszystkie iloczyny dla $j \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$.

W szczególności:

Twierdzenie (5.3.1)

Jeżeli S_d jest powierzchnią $K3$ posiadającą ściśle niesymplektyczny automorfizm rzędu d to istnieje rozwiązanie krepantne osobliwości $Y_{d,n}$ rozmaitości $S_d \times E_d^{n-1} / G_{d,n}$. W szczególności $Y_{d,n}$ jest $(n+1)$-wymiarową rozmaitością Calabiego-Yau.

Rozmaitość $Y_{d,n}$ nazywamy *uogólniona rozmaitością Calabiego-Yau typu Borcea-Voisin.*

Liczby Hodge'a

Aby obliczyć $h^{p,q}(\widetilde{\mathcal{X}_{d,n}})$ wystarczy obliczyć iloczyn skalarny wektora $v_{X_i,j}$ z

$$v_d := \left(1, \sqrt[d]{(XY)}, \sqrt[d]{(XY)^2}, \ldots, \sqrt[d]{(XY)^{d-1}}\right)$$

for $1 \leqslant j \leqslant n$. Następnie mnożymy wszystkie wartości $v_{X_i,j} \circ v_d$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ i dodajemy wszystkie iloczyny dla $j \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$. W szczególności:

Twierdzenie (5.3.1)

Jeżeli S_d jest powierzchnią $K3$ posiadającą ściśle niesymplektyczny automorfizm rzędu d to istnieje rozwiązanie krepantne osobliwości $Y_{d,n}$ rozmaitości $S_d \times E_d^{n-1} / G_{d,n}$. W szczególności $Y_{d,n}$ jest $(n+1)$-wymiarową rozmaitością Calabiego-Yau.

Rozmaitość $Y_{d,n}$ nazywamy *uogólniona rozmaitością Calabiego-Yau typu Borcea-Voisin.*

Liczby Hodge'a

Aby obliczyć $h^{p,q}(\widetilde{\mathcal{X}_{d,n}})$ wystarczy obliczyć iloczyn skalarny wektora $v_{X_i,j}$ z

$$v_d := \left(1, \sqrt[d]{(XY)}, \sqrt[d]{(XY)^2}, \ldots, \sqrt[d]{(XY)^{d-1}}\right)$$

for $1 \leqslant j \leqslant n$. Następnie mnożymy wszystkie wartości $v_{X_i,j} \circ v_d$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ i dodajemy wszystkie iloczyny dla $j \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$. W szczególności:

Twierdzenie (5.3.1)

Jeżeli S_d jest powierzchnią $K3$ posiadającą ściśle niesymplektyczny automorfizm rzędu d to istnieje rozwiązanie krepantne osobliwości $Y_{d,n}$ rozmaitości $S_d \times E_d^{n-1} \big/ G_{d,n}$. W szczególności $Y_{d,n}$ jest $(n+1)$-wymiarową rozmaitością Calabiego-Yau.

Rozmaitość $Y_{d,n}$ nazywamy *uogólniona rozmaitością Calabiego-Yau typu Borcea-Voisin.*

Przykład – $X_{6,n}$

$$h^{p,q}\left(\widetilde{E_6^n / G_{6,n}}\right) =$$

$$= \Bigg\{ \left((1+XY)\cdot\sqrt[6]{(XY)^0} + 1\cdot\sqrt[6]{XY} + 2\cdot\sqrt[6]{(XY)^2} + 2\cdot\sqrt[6]{(XY)^3} + 2\cdot\sqrt[6]{(XY)^4} + 1\cdot\sqrt[6]{(XY)^5}\right)^n +$$

$$+ \left(X\cdot\sqrt[6]{(XY)^0} + 0\cdot\sqrt[6]{XY} + 0\cdot\sqrt[6]{(XY)^2} + 0\cdot\sqrt[6]{(XY)^3} + 0\cdot\sqrt[6]{(XY)^4} + 0\cdot\sqrt[6]{(XY)^5}\right)^n +$$

$$+ \left(0\cdot\sqrt[6]{(XY)^0} + 0\cdot\sqrt[6]{XY} + 0\cdot\sqrt[6]{(XY)^2} + 1\cdot\sqrt[6]{(XY)^3} + 0\cdot\sqrt[6]{(XY)^4} + 0\cdot\sqrt[6]{(XY)^5}\right)^n +$$

$$+ \left(0\cdot\sqrt[6]{(XY)^0} + 0\cdot\sqrt[6]{XY} + 1\cdot\sqrt[6]{(XY)^2} + 0\cdot\sqrt[6]{(XY)^3} + 1\cdot\sqrt[6]{(XY)^4} + 0\cdot\sqrt[6]{(XY)^5}\right)^n +$$

$$+ \left(0\cdot\sqrt[6]{(XY)^0} + 0\cdot\sqrt[6]{XY} + 0\cdot\sqrt[6]{(XY)^2} + 1\cdot\sqrt[6]{(XY)^3} + 0\cdot\sqrt[6]{(XY)^4} + 0\cdot\sqrt[6]{(XY)^5}\right)^n +$$

$$+ \left(Y\cdot\sqrt[6]{(XY)^0} + 0\cdot\sqrt[6]{XY} + 0\cdot\sqrt[6]{(XY)^2} + 0\cdot\sqrt[6]{(XY)^3} + 0\cdot\sqrt[6]{(XY)^4} + 0\cdot\sqrt[6]{(XY)^5}\right)^n \Bigg\}[X^pY^q] =$$

$$= \Bigg\{ X^n + Y^n + \left(1 + XY + \sqrt[6]{XY} + 2\sqrt[6]{(XY)^2} + 2\sqrt[6]{(XY)^3} + 2\sqrt[6]{(XY)^4} + \sqrt[6]{(XY)^5}\right)^n +$$

$$+ 2\cdot(XY)^{\frac{n}{2}} + \left(\sqrt[6]{(XY)^2} + \sqrt[6]{(XY)^4}\right)^n \Bigg\}[X^pY^q].$$

Przykład – $X_{6,n}$

$$h^{p,q}\left(\widetilde{E_6^n/G_{6,n}}\right) =$$

$$= \Bigg\{ \left((1+XY)\cdot\sqrt[6]{(XY)^0} + 1\cdot\sqrt[6]{XY} + 2\cdot\sqrt[6]{(XY)^2} + 2\cdot\sqrt[6]{(XY)^3} + 2\cdot\sqrt[6]{(XY)^4} + 1\cdot\sqrt[6]{(XY)^5}\right)^n +$$

$$+ \left(X\cdot\sqrt[6]{(XY)^0} + 0\cdot\sqrt[6]{XY} + 0\cdot\sqrt[6]{(XY)^2} + 0\cdot\sqrt[6]{(XY)^3} + 0\cdot\sqrt[6]{(XY)^4} + 0\cdot\sqrt[6]{(XY)^5}\right)^n +$$

$$+ \left(0\cdot\sqrt[6]{(XY)^0} + 0\cdot\sqrt[6]{XY} + 0\cdot\sqrt[6]{(XY)^2} + 1\cdot\sqrt[6]{(XY)^3} + 0\cdot\sqrt[6]{(XY)^4} + 0\cdot\sqrt[6]{(XY)^5}\right)^n +$$

$$+ \left(0\cdot\sqrt[6]{(XY)^0} + 0\cdot\sqrt[6]{XY} + 1\cdot\sqrt[6]{(XY)^2} + 0\cdot\sqrt[6]{(XY)^3} + 1\cdot\sqrt[6]{(XY)^4} + 0\cdot\sqrt[6]{(XY)^5}\right)^n +$$

$$+ \left(0\cdot\sqrt[6]{(XY)^0} + 0\cdot\sqrt[6]{XY} + 0\cdot\sqrt[6]{(XY)^2} + 1\cdot\sqrt[6]{(XY)^3} + 0\cdot\sqrt[6]{(XY)^4} + 0\cdot\sqrt[6]{(XY)^5}\right)^n +$$

$$+ \left(Y\cdot\sqrt[6]{(XY)^0} + 0\cdot\sqrt[6]{XY} + 0\cdot\sqrt[6]{(XY)^2} + 0\cdot\sqrt[6]{(XY)^3} + 0\cdot\sqrt[6]{(XY)^4} + 0\cdot\sqrt[6]{(XY)^5}\right)^n \Bigg\}[X^pY^q] =$$

$$= \Bigg\{ X^n + Y^n + \left(1 + XY + \sqrt[6]{XY} + 2\sqrt[6]{(XY)^2} + 2\sqrt[6]{(XY)^3} + 2\sqrt[6]{(XY)^4} + \sqrt[6]{(XY)^5}\right)^n +$$

$$+ 2\cdot(XY)^{\frac{n}{2}} + \left(\sqrt[6]{(XY)^2} + \sqrt[6]{(XY)^4}\right)^n \Bigg\}[X^pY^q].$$

Liczby Hodge'a $X_{d,n}$

Twierdzenie

Liczba Hodge'a $h^{p,q}(X_{d,n}) = \left\{F_{X_{d,n}}(X,Y)\right\}[X^pY^q]$ rozmaitości $X_{d,n}$ jest równa

$$\begin{cases} \left\{(X+Y)^n + \left(XY + 4\sqrt{XY} + 1\right)^n\right\}[X^pY^q] & \text{dla } d=2, \\ \left\{X^n + Y^n + \left(1 + \sqrt[3]{XY}\right)^{3n}\right\}[X^pY^q] & \text{dla } d=3, \\ \left\{X^n + Y^n + \left(1 + XY + 2\sqrt[4]{XY} + 3\sqrt[4]{(XY)^2} + 2\sqrt[4]{(XY)^3}\right)^n + \left(\sqrt[4]{(XY)^2}\right)^n\right\}[X^pY^q] & \text{dla } d=4, \\ \left\{X^n + Y^n + \left(1 + XY + \sqrt[6]{XY} + 2\sqrt[6]{(XY)^2} + 2\sqrt[6]{(XY)^3} + 2\sqrt[6]{(XY)^4} + \sqrt[6]{(XY)^5}\right)^n + \right. & \\ \left. + 2\cdot(XY)^{\frac{n}{2}} + \left(\sqrt[6]{(XY)^2} + \sqrt[6]{(XY)^4}\right)^n\right\}[X^pY^q] & \text{dla } d=6. \end{cases}$$

D. Burek, *Higher-dimensional Calabi-Yau manifolds of Kummer type*, Math. Nach. 4 (2020), 638–650.

Wniosek

Charakterystyka Eulera $X_{d,n}$ jest równa

$$e\left(X_{d,n}\right)=\begin{cases}\frac{1}{2}(6^n+3(-2)^n) & \text{dla } d=2,\\ \frac{1}{3}\left(8^n+8(-1)^n\right) & \text{dla } d=3,\\ \frac{1}{4}(9^n+3)+3(-1)^n & \text{dla } d=4,\\ \frac{1}{6}\left(10^n+3\cdot 2^n+8\right)+4(-1)^n & \text{dla } d=6.\end{cases}$$

Diament Hodge'a $X_{6,3}$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & 0 & & 84 & & 0 & \\
1 & & 0 & & 0 & & 1 \\
 & 0 & & 84 & & 0 & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & & 1 & & &
\end{array}
$$

Diament Hodge'a $X_{6,4}$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 0 & & 0 & & & \\
 & & 0 & & 272 & & 0 & & \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \\
1 & & 0 & & 1132 & & 0 & & 1 \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & & 0 & & 272 & & 0 & & \\
 & & & 0 & & 0 & & & \\
 & & & & 1 & & & &
\end{array}
$$

Diament Hodge'a $X_{6,5}$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & & 0 & & 695 & & 0 & & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & 0 & & 0 & & 7645 & & 0 & & 0 & \\
1 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 1 \\
 & 0 & & 0 & & 7645 & & 0 & & 0 & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & & 0 & & 695 & & 0 & & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & & & & 1 & & & & &
\end{array}
$$

$$h^{p,q}\left(\widetilde{S_3 \times E_3^{n-1} / \mathbb{Z}_3^{n-1}}\right) = \Bigg\{\Bigg(\Big((XY)^2 + r \cdot XY + 1\Big) \cdot \sqrt[3]{(XY)^0} +$$

$$+ (k + h \cdot XY + g(C) \cdot (X+Y) + k \cdot XY) \cdot \sqrt[3]{XY} + (k + h + g(C) \cdot (X+Y) + k \cdot XY) \cdot \sqrt[3]{(XY)^2}\Bigg) \times$$

$$\times \left((1 + XY) \cdot \sqrt[3]{(XY)^0} + 3 \cdot \sqrt[3]{XY} + 3 \cdot \sqrt[3]{(XY)^2}\right)^{n-1} +$$

$$+ \left((X^2 + (m-1) \cdot XY) \cdot \sqrt[3]{(XY)^0} + 0 \cdot \sqrt[3]{XY} + 0 \cdot \sqrt[3]{(XY)^2}\right) \cdot \left(X \cdot \sqrt[3]{(XY)^0} + 0 \cdot \sqrt[3]{XY} + 0 \cdot \sqrt[3]{(XY)^2}\right)^{n-1} +$$

$$+ \left((Y^2 + (m-1) \cdot XY) \cdot \sqrt[3]{(XY)^0} + 0 \cdot \sqrt[3]{XY} + 0 \cdot \sqrt[3]{(XY)^2}\right) \cdot \left(Y \cdot \sqrt[3]{(XY)^0} + 0 \cdot \sqrt[3]{XY} + 0 \cdot \sqrt[3]{(XY)^2}\right)^{n-1}\Bigg\}[X^pY^q] =$$

$$= \Bigg\{\Bigg((XY)^2 + r \cdot XY + 1 + \Big(k + h \cdot XY + g(C) \cdot (X+Y) + k \cdot XY\Big) \cdot \sqrt[3]{XY} + \Big(k + h + g(C) \cdot (X+Y) +$$

$$+ k \cdot XY\Big) \cdot \sqrt[3]{(XY)^2}\Bigg) \cdot \left(1 + XY + 3\sqrt[3]{XY} + 3\sqrt[3]{(XY)^2}\right)^{n-1} + \Big(X^2 + (m-1) \cdot XY\Big) \cdot X^{n-1} +$$

$$+ \Big(Y^2 + (m-1) \cdot XY\Big) \cdot Y^{n-1}\Bigg\}[X^pY^q]$$

Liczby Hodge'a $Y_{3,n}$

$$h^{p,q}\left(\widetilde{S_3\times E_3^{n-1}\big/_{\mathbb{Z}_3^{n-1}}}\right)=\Bigg\{\Bigg(\Big((XY)^2+r\cdot XY+1\Big)\cdot\sqrt[3]{(XY)^0}+$$

$$+(k+h\cdot XY+g(C)\cdot(X+Y)+k\cdot XY)\cdot\sqrt[3]{XY}+(k+h+g(C)\cdot(X+Y)+k\cdot XY)\cdot\sqrt[3]{(XY)^2}\Bigg)\times$$

$$\times\left((1+XY)\cdot\sqrt[3]{(XY)^0}+3\cdot\sqrt[3]{XY}+3\cdot\sqrt[3]{(XY)^2}\right)^{n-1}+$$

$$+\left((X^2+(m-1)\cdot XY)\cdot\sqrt[3]{(XY)^0}+0\cdot\sqrt[3]{XY}+0\cdot\sqrt[3]{(XY)^2}\right)\cdot\left(X\cdot\sqrt[3]{(XY)^0}+0\cdot\sqrt[3]{XY}+0\cdot\sqrt[3]{(XY)^2}\right)^{n-1}+$$

$$+\left((Y^2+(m-1)\cdot XY)\cdot\sqrt[3]{(XY)^0}+0\cdot\sqrt[3]{XY}+0\cdot\sqrt[3]{(XY)^2}\right)\cdot\left(Y\cdot\sqrt[3]{(XY)^0}+0\cdot\sqrt[3]{XY}+0\cdot\sqrt[3]{(XY)^2}\right)^{n-1}\Bigg\}[X^pY^q]=$$

$$=\Bigg\{\Bigg((XY)^2+r\cdot XY+1+\Big(k+h\cdot XY+g(C)\cdot(X+Y)+k\cdot XY\Big)\cdot\sqrt[3]{XY}+\Big(k+h+g(C)\cdot(X+Y)+$$

$$+k\cdot XY\Big)\cdot\sqrt[3]{(XY)^2}\Bigg)\cdot\left(1+XY+3\sqrt[3]{XY}+3\sqrt[3]{(XY)^2}\right)^{n-1}+\Big(X^2+(m-1)\cdot XY\Big)\cdot X^{n-1}+$$

$$+\Big(Y^2+(m-1)\cdot XY\Big)\cdot Y^{n-1}\Bigg\}[X^pY^q]$$

Diament Hodge'a $Y_{3,2}$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & 0 & & h^{1,1} & & 0 & \\
1 & & h^{2,1} & & h^{2,1} & & 1 \\
 & 0 & & h^{1,2} & & 0 & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & & 1 & & &
\end{array}
$$

- $h^{1,1} = r + 3h + 6k + 1$
- $h^{1,2} = m - 1 + 6g(C)$

Diament Hodge'a $Y_{3,3}$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 0 & & 0 & & & \\
 & & 0 & & h^{1,1} & & 0 & & \\
 & 0 & & h^{2,1} & & h^{1,2} & & 0 & \\
1 & & h^{3,1} & & h^{2,2} & & h^{1,3} & & 1 \\
 & 0 & & h^{3,2} & & h^{2,3} & & 0 & \\
 & & 0 & & h^{3,3} & & 0 & & \\
 & & & 0 & & 0 & & & \\
 & & & & 1 & & & &
\end{array}
$$

- $h^{1,1} = r + 6h + 21k + 20$
- $h^{2,2} = 2 + 42k + 30h + 20r$
- $h^{2,1} = 21g(C)$
- $h^{3,1} = m - 1$

Diament Hodge'a $Y_{3,4}$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & & 0 & & h^{1,1} & & 0 & & & \\
 & & 0 & & h^{2,1} & & h^{1,2} & & 0 & & \\
 & 0 & & 0 & & h^{2,2} & & 0 & & 0 & \\
1 & & h^{4,1} & & h^{3,2} & & h^{2,3} & & h^{1,4} & & 1 \\
 & 0 & & 0 & & h^{3,3} & & 0 & & 0 & \\
 & & 0 & & h^{4,3} & & h^{3,4} & & 0 & & \\
 & & & 0 & & h^{4,4} & & 0 & & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & & & & 1 & & & & &
\end{array}
$$

- $h^{1,1} = r + 9h + 45k + 84$
- $h^{2,2} = 85 + 297k + 162h + 84r$
- $h^{2,1} = 45g(C)$
- $h^{3,2} = 252g(C)$
- $h^{4,1} = m - 1$

Funkcja Zeta rozmaitości algebraicznej

Niech $q = p^k$ będzie potęgą liczby pierwsze oraz $X/\mathbb{F}_q$ rozmaitości algebraiczną zdefiniowaną nad $\mathbb{F}_q$. Wtedy *funkcja Zeta* rozmaitości $X/\mathbb{F}_q$ jest zdefiniowana następująco

$$Z_q(t) := \exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} N_{q^r} \cdot \frac{t^r}{r}\right) \in \mathbb{Q}[[t]],$$

gdzie N_{q^r} jest liczbą $\mathbb{F}_{q^r}$-wymiernych punktów X.
Na podstawie hipotez Weila funkcja Zeta $Z_q(t)$ jest funkcją **wymierną** postaci

$$Z_q(t) = \frac{P_{1,q}(t) \cdot P_{3,q}(t) \cdot \ldots \cdot P_{2d-1,q}(t)}{P_{0,q}(t) \cdot P_{2,q}(t) \cdot \ldots \cdot P_{2d,q}(t)},$$

gdzie $P_{0,q}(t) = 1 - t$, $P_{2d,q}(t) = 1 - q^d t$ oraz

$$P_{i,q}(t) = \prod_{j=1}^{b_i} (1 - \alpha_{i,j} t)$$

dla $1 \leqslant i \leqslant 2d - 1$, gdzie $\alpha_{i,j}$ są liczbami algebraicznymi całkowitymi takimi, że $|\alpha_{i,j}| = q^{i/2}$.

Niech $q = p^k$ będzię potęgą liczby pierwsze oraz $X/\mathbb{F}_q$ rozmaitości algebraiczną zdefiniowaną nad $\mathbb{F}_q$. Wtedy *funkcja Zeta* rozmaitości $X/\mathbb{F}_q$ jest zdefiniowana następująco

$$Z_q(t) := \exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} N_{q^r} \cdot \frac{t^r}{r}\right) \in \mathbb{Q}[[t]],$$

gdzie N_{q^r} jest liczbą $\mathbb{F}_{q^r}$-wymiernych punktów X.

Na podstawie hipotez Weila funkcja Zeta $Z_q(t)$ jest funkcją **wymierną** postaci

$$Z_q(t) = \frac{P_{1,q}(t) \cdot P_{3,q}(t) \cdot \ldots \cdot P_{2d-1,q}(t)}{P_{0,q}(t) \cdot P_{2,q}(t) \cdot \ldots \cdot P_{2d,q}(t)},$$

gdzie $P_{0,q}(t) = 1 - t$, $P_{2d,q}(t) = 1 - q^d t$ oraz

$$P_{i,q}(t) = \prod_{j=1}^{b_i} (1 - \alpha_{i,j} t)$$

dla $1 \leqslant i \leqslant 2d - 1$, gdzie $\alpha_{i,j}$ są liczbami algebraicznymi całkowitymi takimi, że $|\alpha_{i,j}| = q^{i/2}$.

Funkcja Zeta rozmaitości algebraicznej

Niech $q = p^k$ będzie potęgą liczby pierwsze oraz $X/\mathbb{F}_q$ rozmaitości algebraiczną zdefiniowaną nad $\mathbb{F}_q$. Wtedy *funkcja Zeta* rozmaitości $X/\mathbb{F}_q$ jest zdefiniowana następująco

$$Z_q(t) := \exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} N_{q^r} \cdot \frac{t^r}{r}\right) \in \mathbb{Q}[[t]],$$

gdzie N_{q^r} jest liczbą $\mathbb{F}_{q^r}$-wymiernych punktów X.
Na podstawie hipotez Weila funkcja Zeta $Z_q(t)$ jest funkcją **wymierną** postaci

$$Z_q(t) = \frac{P_{1,q}(t) \cdot P_{3,q}(t) \cdot \ldots \cdot P_{2d-1,q}(t)}{P_{0,q}(t) \cdot P_{2,q}(t) \cdot \ldots \cdot P_{2d,q}(t)},$$

gdzie $P_{0,q}(t) = 1 - t$, $P_{2d,q}(t) = 1 - q^d t$ oraz

$$P_{i,q}(t) = \prod_{j=1}^{b_i} (1 - \alpha_{i,j} t)$$

dla $1 \leqslant i \leqslant 2d - 1$, gdzie $\alpha_{i,j}$ są liczbami algebraicznymi całkowitymi takimi, że $|\alpha_{i,j}| = q^{i/2}$.

Funkcja Zeta

Dla X_i jak wcześniej niech

$$Z_{X_i,m,j}(T) = \prod_{\lambda_i \geqslant 0} \prod_{0 \leqslant k_i \leqslant 2\dim X_i} \det\left(1 - \mathrm{Frob}_q^* T \mid H^{k_i}\left(X_{i,m,\lambda_i}\right)_{\zeta_d^j}\right)^{(-1)^{k_i+1}} (q^{\lambda_i} T).$$

Twierdzenie (2.7.1)

Funkcja Zeta $Z_q\left(\widetilde{\mathcal{X}_{d,n}}\right)(T)$ jest równa iloczynowi czynników funkcji wymiernej zmiennej T

$$\left(\prod_{j=0}^{d-1} \bigotimes_{i=1}^{n} \left(\prod_{m=0}^{d-1} Z_{X_i,m,j}\left(q^{\frac{m}{d}} T\right)\right)\right)^{(-1)^{n+1}}$$

które zawierają tylko całkowite potęgi q.

Funkcja Zeta

$k \backslash j$	0	1	$\cdots$	j	$\cdots$	$d-1$
0	$Z_{X_i,0,0}$	$Z_{X_i,0,1}$		$Z_{X_i,0,j}$		$Z_{X_i,0,d-1}$
1	$Z_{X_i,1,0}$	$Z_{X_i,1,1}$		$Z_{X_i,1,j}$		$Z_{X_i,1,d-1}$
2	$Z_{X_i,2,0}$	$Z_{X_i,2,1}$	$\cdots$	$Z_{X_i,2,j}$	$\cdots$	$Z_{X_i,2,d-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$d-1$	$Z_{X_i,d-1,0}$	$Z_{X_i,d-1,1}$		$Z_{X_i,d-1,j}$		$Z_{X_i,d-1,d-1}$

Funkcja Zeta

$k \backslash j$	0	1	$\cdots$	j	$\cdots$	$d-1$
0	$Z_{X_i,0,0}$	$Z_{X_i,0,1}$		$Z_{X_i,0,j}$		$Z_{X_i,0,d-1}$
1	$Z_{X_i,1,0}$	$Z_{X_i,1,1}$		$Z_{X_i,1,j}$		$Z_{X_i,1,d-1}$
2	$Z_{X_i,2,0}$	$Z_{X_i,2,1}$	$\cdots$	$Z_{X_i,2,j}$	$\cdots$	$Z_{X_i,2,d-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$d-1$	$Z_{X_i,d-1,0}$	$Z_{X_i,d-1,1}$		$Z_{X_i,d-1,j}$		$Z_{X_i,d-1,d-1}$

$$\| \\ \upsilon_{X_i,j}$$

Aby obliczyć $Z^q(\widetilde{\mathcal{X}_{d,n}})$ wystarczy znaleźć ewualuację wektora $v_{X_{i,j}}$ na

$$v_d := \left(T, \sqrt[d]{q}T, \sqrt[d]{q^2}T, \ldots, \sqrt[d]{q^{d-1}}T\right)$$

następnie wymnożyć wszystkie wyrazy otrzymanego wektora. Biorąc iloczyn tensorowy dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ i iloczyn po $j \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$ a na końcu $(-1)^{n+1}$ potęgę otrzymujemy wynik.

Dowód jest "identyczny" do dowodu twierdzenia 2.3.3 i w istotny sposób korzysta z opisu działania endomorwizmu Frobeniusa na kohomologiach Chena-Ruana podany przez Rose'a:

M. A. Rose *Frobenius action on ℓ-adic Chen–Ruan cohomology*, Communications in Number Theory and Physics **1.3** (2007), 513–537.

Aby obliczyć $Z^q(\widetilde{\mathcal{X}_{d,n}})$ wystarczy znaleźć ewualuację wektora $v_{X_{i,j}}$ na

$$v_d := \left(T, \sqrt[d]{q}T, \sqrt[d]{q^2}T, \ldots, \sqrt[d]{q^{d-1}}T\right)$$

następnie wymnożyć wszystkie wyrazy otrzymanego wektora. Biorąc iloczyn tensorowy dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ i iloczyn po $j \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$ a na końcu $(-1)^{n+1}$ potęgę otrzymujemy wynik.
Dowód jest "identyczny" do dowodu twierdzenia 2.3.3 i w istotny sposób korzysta z opisu działania endomorwizmu Frobeniusa na kohomologiach Chena-Ruana podany przez Rose'a:

M. A. Rose *Frobenius action on ℓ-adic Chen–Ruan cohomology*, Communications in Number Theory and Physics **1.3** (2007), 513–537.

Funkcja Zeta $Y_{6,2}$

$$
\begin{aligned}
Z_q\left(\widetilde{S_6 \times E_6 /_{\mathbb{Z}_6}}\right) = & \Bigg[\Bigg(\frac{1}{(1-T)(1-q\cdot T)} \cdot \frac{1}{(1-\sqrt[6]{q}\cdot T)} \cdot \frac{1}{(1-\sqrt[6]{q^2}\cdot T)^2} \cdot \frac{1}{(1-\sqrt[6]{q^3}\cdot T)^2} \cdot \\
& \cdot \frac{1}{(1-\sqrt[6]{q^4}\cdot T)^2} \cdot \frac{1}{(1-\sqrt[6]{q^5}\cdot T)}\Bigg) \otimes \Bigg(\frac{1}{(1-T)(1-q\cdot T)^{19}(1-q^2\cdot T)} \cdot \frac{1}{(1-\sqrt[6]{q}\cdot T)^3(1-\sqrt[6]{q}\cdot q\cdot T)^{18}} \cdot \\
& \cdot \frac{1}{(1-\sqrt[6]{q^2}\cdot T)^6(1-\sqrt[6]{q^2}\cdot q\cdot T)^{15}} \cdot \frac{1}{(1-\sqrt[6]{q^3}\cdot T)^{10}(1-\sqrt[6]{q^3}\cdot q\cdot T)^{10}} \cdot \frac{1}{(1-\sqrt[6]{q^4}\cdot T)^{15}(1-\sqrt[6]{q^4}\cdot q\cdot T)^{6}} \cdot \\
& \cdot \frac{1}{(1-\sqrt[6]{q^5}\cdot T)^{18}(1-\sqrt[6]{q^5}\cdot q\cdot T)^{3}}\Bigg)\Bigg] \times \left[(1-\alpha_q T) \otimes \left(\frac{1}{1-\beta_q T}\right)\right] \times \left[\left(\frac{1}{1-\sqrt[6]{q^3}\cdot T}\right) \otimes (1-\sqrt[6]{q^3}\cdot\delta_q\cdot T)\right] \times \\
& \times \left[\left(\frac{1}{1-\sqrt[6]{q^2}\cdot T} \cdot \frac{1}{1-\sqrt[6]{q^4}\cdot T}\right) \otimes \left(\frac{1}{1-c_q\cdot q\cdot T}\right)\right] \times \left[\left(\frac{1}{1-\sqrt[6]{q^3}\cdot T}\right) \otimes (1-\sqrt[6]{q^3}\cdot\overline{\delta_q}\cdot T)\right] \times \\
& \times \left[(1-\overline{\alpha_q}\cdot T) \otimes \left(\frac{1}{1-\overline{\beta_q}\cdot T}\right)\right]^{-1} = \frac{(1-\alpha_q\beta_q T)(1-\delta_q T)(1-\overline{\delta_q}T)(1-\overline{\alpha_q}\overline{\beta_q}T)}{(1-T)(1-qT)^{103}(1-q^2T)^{103}(1-q^3T)}.
\end{aligned}
$$

Funkcja Zeta $Y_{6,2}$

$$
\begin{aligned}
&Z_q\left(\widetilde{S_6\times E_6}/\mathbb{Z}_6\right)=\Bigg[\Bigg(\frac{1}{(1-T)(1-q\cdot T)}\cdot\frac{1}{(1-\sqrt[6]{q}\cdot T)}\cdot\frac{1}{(1-\sqrt[6]{q^2}\cdot T)^2}\cdot\frac{1}{(1-\sqrt[6]{q^3}\cdot T)^2}\cdot\\
&\cdot\frac{1}{(1-\sqrt[6]{q^4}\cdot T)^2}\cdot\frac{1}{(1-\sqrt[6]{q^5}\cdot T)}\Bigg)\otimes\Bigg(\frac{1}{(1-T)(1-q\cdot T)^{19}(1-q^2\cdot T)}\cdot\frac{1}{(1-\sqrt[6]{q}\cdot T)^3(1-\sqrt[6]{q}\cdot q\cdot T)^{18}}\cdot\\
&\cdot\frac{1}{(1-\sqrt[6]{q^2}\cdot T)^6(1-\sqrt[6]{q^2}\cdot q\cdot T)^{15}}\cdot\frac{1}{(1-\sqrt[6]{q^3}\cdot T)^{10}(1-\sqrt[6]{q^3}\cdot q\cdot T)^{10}}\cdot\frac{1}{(1-\sqrt[6]{q^4}\cdot T)^{15}(1-\sqrt[6]{q^4}\cdot q\cdot T)^{6}}\cdot\\
&\cdot\frac{1}{(1-\sqrt[6]{q^5}\cdot T)^{18}(1-\sqrt[6]{q^5}\cdot q\cdot T)^{3}}\Bigg)\Bigg]\times\left[(1-\alpha_qT)\otimes\left(\frac{1}{1-\beta_qT}\right)\right]\times\left[\left(\frac{1}{1-\sqrt[6]{q^3}\cdot T}\right)\otimes(1-\sqrt[6]{q^3}\cdot\delta_q\cdot T)\right]\times\\
&\times\left[\left(\frac{1}{1-\sqrt[6]{q^2}\cdot T}\cdot\frac{1}{1-\sqrt[6]{q^4}\cdot T}\right)\otimes\left(\frac{1}{1-c_q\cdot q\cdot T}\right)\right]\times\left[\left(\frac{1}{1-\sqrt[6]{q^3}\cdot T}\right)\otimes(1-\sqrt[6]{q^3}\cdot\overline{\delta_q}\cdot T)\right]\times\\
&\times\left[(1-\overline{\alpha_q}\cdot T)\otimes\left(\frac{1}{1-\overline{\beta_q}\cdot T}\right)\right]^{-1}=\frac{(1-\alpha_q\beta_qT)(1-\delta_qT)(1-\overline{\delta_q}T)(1-\overline{\alpha_q}\overline{\beta_q}T)}{(1-T)(1-qT)^{103}(1-q^2T)^{103}(1-q^3T)}.
\end{aligned}
$$

Diament Hodge'a $Y_{6,2}$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & 0 & & 103 & & 0 & \\
1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & 0 & & 103 & & 0 & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & & 1 & & &
\end{array}
$$

Funkcja Zeta $Y_{6,3}$, $Y_{6,4}$

$$Z_q\left(\widetilde{S_6\times E_6^2/\mathbb{Z}_6}\right)=\frac{1}{(1-T)\,(1-qT)^{340}\left(1-\overline{\alpha_q}^2\overline{\beta_q}\,T\right)(1-\alpha_q{}^2\beta_q\,T)\,(1-q^2T)^{1402}\,(1-q^3T)^{340}\,(1-q^2c_qT)^2\,(1-q^4T)}$$

$$Z_q\left(\widetilde{S_6\times E_6^3/\mathbb{Z}_6}\right)=\frac{(1-\alpha_q{}^3\beta_q\,T)\,(1-q^2\delta_q\,T)\left(1-q^2\overline{\delta_q}\,T\right)\left(1-\overline{\alpha_q}^3\overline{\beta_q}\,T\right)}{(1-T)\,(1-qT)^{868}\,(1-q^2T)^{9548}\,(1-q^2c_qT)\,(1-q^3c_qT)\,(1-q^3T)^{9548}\,(1-q^4T)^{868}\,(1-q^5T)}$$

$$Z_q\left(\widetilde{S_6 \times E_6^2 / \mathbb{Z}_6}\right) = \frac{1}{(1-T)(1-qT)^{340}\left(1-\overline{\alpha_q}^2\overline{\beta_q}T\right)(1-\alpha_q{}^2\beta_q T)(1-q^2T)^{1402}(1-q^3T)^{340}(1-q^2c_qT)^2(1-q^4T)}$$

$$Z_q\left(\widetilde{S_6 \times E_6^3 / \mathbb{Z}_6}\right) = \frac{(1-\alpha_q{}^3\beta_q T)(1-q^2\delta_q T)\left(1-q^2\overline{\delta_q}T\right)\left(1-\overline{\alpha_q}^3\overline{\beta_q}T\right)}{(1-T)(1-qT)^{868}(1-q^2T)^{9548}(1-q^2c_qT)(1-q^3c_qT)(1-q^3T)^{9548}(1-q^4T)^{868}(1-q^5T)}$$

Diament Hodge'a $Y_{6,3}$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 0 & & 0 & & & \\
 & & 0 & & 340 & & 0 & & \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \\
1 & & 0 & & 1404 & & 0 & & 1 \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & & 0 & & 340 & & 0 & & \\
 & & & 0 & & 0 & & & \\
 & & & & 1 & & & &
\end{array}
$$

Diament Hodge'a $Y_{6,4}$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & & 0 & & 868 & & 0 & & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & 0 & & 0 & & 9549 & & 0 & & 0 & \\
1 & & 0 & & 1 & & 1 & & 0 & & 1 \\
 & 0 & & 0 & & 9549 & & 0 & & 0 & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & & 0 & & 868 & & 0 & & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & & & & 1 & & & & &
\end{array}
$$