LII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

2 kwietnia 2001 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie **1.** Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ i dowolnych liczb rzeczywistych nieujemnych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} i x_i \leqslant \binom{n}{2} + \sum_{i=1}^{n} x_i^i .$$

Rozwiązanie

Z nierówności między średnią geometryczną i średnią arytmetyczną zastosowanej do liczb

$$y_1 = x_i^i, \quad y_2 = y_3 = \ldots = y_i = 1 \quad (2 \leqslant i \leqslant n)$$

otrzymujemy

$$x_i = \sqrt[i]{y_1 y_2 y_3 \ldots y_i} \leqslant \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_i}{i} = \frac{x_i^i + (i-1)}{i} .$$

Zatem

$$\sum_{i=1}^{n} i x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} (i-1) + \sum_{i=1}^{n} x_i^i, \quad \text{czyli} \quad \sum_{i=1}^{n} i x_i \leqslant \binom{n}{2} + \sum_{i=1}^{n} x_i^i .$$

Uwaga

W nierówności (1) równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie liczby $y_1, y_2, \ldots, y_i$ są równe. Zatem w danej w zadaniu nierówności równość zachodzi tylko przy $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 1$.

Zadanie **2.** Dowieść, że suma odległości dowolnego punktu leżącego wewnątrz czworościanu foremnego o krawędzi 1 od jego wierzchołków jest nie większa niż 3.

Rozwiązanie

Niech $A_1 A_2 A_3 A_4$ będzie danym czworościanem, a P dowolnym punktem w jego wnętrzu. Załóżmy, że prosta $A_i P$ przecina przeciwległą ścianę czworościanu $A_1 A_2 A_3 A_4$ w punkcie B_i. Niech $\mathcal{C}_i$ będzie czworościanem, którego jedną ścianą jest ta ściana czworościanu $A_1 A_2 A_3 A_4$, która zawiera punkt B_i, zaś przeciwległym wierzchołkiem punkt P. Wtedy

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{PB_i}{A_i B_i} = \sum_{i=1}^{4} \frac{V(\mathcal{C}_i)}{V(A_1 A_2 A_3 A_4)} = 1, \qquad \text{skąd} \qquad \sum_{i=1}^{4} \frac{A_i P}{A_i B_i} = 3.$$

($V(\mathcal{T})$ oznacza objętość czworościanu $\mathcal{T}$.) Z nierówności $A_i B_i < 1$ oraz z powyższej zależności wynika teza.

Zadanie **3.** Rozważamy ciąg (x_n) określony rekurencyjnie wzorami

$$x_1 = a, \quad x_2 = b \quad \text{oraz} \quad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad \text{dla } n = 1,2,3,\ldots,$$

gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi.
Liczbę c będziemy nazywać *wartością wielokrotną* ciągu (x_n), jeżeli istnieją co najmniej dwie różne liczby całkowite dodatnie k i l takie, że $x_k = x_l = c$. Wykazać, że można tak dobrać liczby a i b, aby ciąg (x_n) miał więcej niż 2000 wartości wielokrotnych, ale nie można tak dobrać a i b, aby miał on nieskończenie wiele wartości wielokrotnych.

Rozwiązanie

Ciąg (x_n) spełnia taką samą rekurencję, jak ciąg Fibonacciego

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{dla } n = 1,2,3,\ldots .$$

Niech dodatkowo $F_0 = 0$ oraz $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$ dla $n = 1,2,3,\ldots$. Wówczas równość $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ zachodzi dla dowolnej liczby całkowitej n.

Przyjmijmy $a = F_{-4001}$ oraz $b = F_{-4000}$. Wtedy $x_n = F_{n-4002}$. Ponadto dla $n = 1,3,5,7,\ldots,4001$ uzyskujemy $x_n = F_{n-4002} = F_{4002-n} = x_{8004-n}$. Stąd wynika, że liczby $F_1, F_3, F_5, \ldots, F_{4001}$ są wartościami wielokrotnymi ciągu (x_n); są one różne i jest ich więcej niż 2000.

Dla dowolnego ciągu (x_n) spełniającego warunek

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad \text{dla } n = 1,2,3,\ldots$$

istnieją takie liczby rzeczywiste A i B, że

$$x_n = A\alpha^n + B\beta^n \quad \text{dla } n = 1,2,3,\ldots,$$

gdzie $\alpha = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, $\beta = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ są pierwiastkami wielomianu $x^2 - x - 1$.

Jeżeli $A = B = 0$, to wszystkie wyrazy ciągu (x_n) są zerami i liczba 0 jest jedyną wartością wielokrotną ciągu (x_n).

Jeżeli $A = 0$ oraz $B \neq 0$, to wszystkie wyrazy ciągu (x_n) są różne i ciąg (x_n) nie ma wartości wielokrotnych.

Jeżeli natomiast $A \neq 0$, to

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} +\infty & \text{gdy } A > 0\,, \\ -\infty & \text{gdy } A < 0\,. \end{cases}$$

Zatem istnieje taka liczba naturalna N, że dla wszystkich $n \geqslant N$, $x_n \neq 0$. Ponadto

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{A\alpha^{n+1} + B\beta^{n+1}}{A\alpha^n + B\beta^n} = \frac{A\alpha + B\beta\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n}{A + B\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n} \quad (n \geqslant N),$$

a zatem $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \alpha > 1$.

Stąd wynika, że ciąg (x_n) od pewnego miejsca jest rosnący i w związku z tym nie może mieć nieskończenie wielu wartości wielokrotnych.

LII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

3 kwietnia 2001 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie **4.** Dane są takie liczby całkowite a i b, że dla każdej liczby całkowitej nieujemnej n liczba $2^n a+b$ jest kwadratem liczby całkowitej. Dowieść, że $a=0$.

Rozwiązanie

Jeżeli $b=0$, to $a=0$, gdyż dla $a\neq 0$ liczby a i $2a$ nie mogą być jednocześnie kwadratami liczb całkowitych.

Gdyby liczba a była ujemna, to dla pewnej, dużej liczby naturalnej n, liczba $2^n a+b$ też byłaby ujemna, nie mogłaby więc być kwadratem liczby całkowitej.

Pozostaje do rozpatrzenia przypadek, gdy $a\geqslant 0$ oraz $b\neq 0$.

Dla każdej liczby całkowitej dodatniej k, liczby

$$2^{2k}a+b \quad \text{oraz} \quad 4(2^{2k-2}a+b)=2^{2k}a+4b$$

są kwadratami *różnych* liczb całkowitych nieujemnych, powiedzmy

$$2^{2k}a+b=x_k^2 \quad \text{oraz} \quad 2^{2k}a+4b=y_k^2\,.$$

Wówczas $x_k+y_k\leqslant (x_k+y_k)|x_k-y_k|=|x_k^2-y_k^2|=|3b|$, skąd

$$2^{2k}a+b=x_k^2\leqslant (x_k+y_k)^2\leqslant 9b^2 \quad \text{dla każdego } k.$$

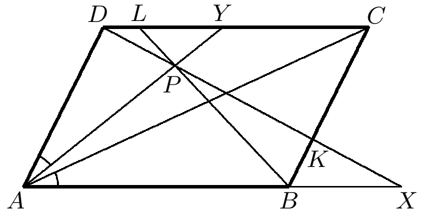
Zatem ciąg (x_k) jest ograniczony, co jest możliwe tylko wtedy, gdy $a=0$.

Zadanie **5.** Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$, przy czym $BK\cdot AD=DL\cdot AB$. Odcinki DK i BL przecinają się w punkcie P. Wykazać, że $\sphericalangle DAP=\sphericalangle BAC$.

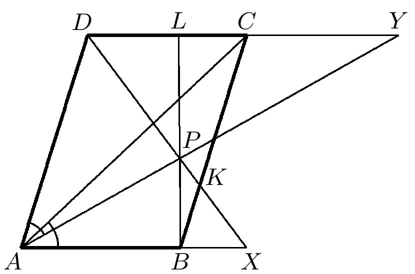
Rozwiązanie

Niech Y będzie punktem przecięcia prostych AP i CD oraz niech X będzie punktem przecięcia prostych DK i AB (rys. 1 i 2). Wówczas

$$\frac{DL}{DY}=\frac{BX}{AX}=\frac{BK}{AD}\,.$$



rys. 1



rys. 2

Stąd oraz z równości danej w treści zadania otrzymujemy:

$$\frac{DY}{AD} = \frac{DL}{BK} = \frac{AD}{AB} = \frac{BC}{AB}.$$

To dowodzi, że trójkąty ABC i ADY są podobne, skąd wynika teza.

Zadanie **6.** Dane są liczby całkowite dodatnie $n_1 < n_2 < \ldots < n_{2000} < 10^{100}$. Dowieść, że ze zbioru $\{n_1, n_2, \ldots, n_{2000}\}$ można wybrać niepuste rozłączne podzbiory A i B mające tyle samo elementów, taką samą sumę elementów i taką samą sumę kwadratów elementów.

Rozwiązanie

Dla zbioru $X \subseteq \{n_1, n_2, \ldots, n_{2000}\}$ niech $s_0(X)$, $s_1(X)$ i $s_2(X)$ oznaczają odpowiednio liczbę elementów, sumę elementów i sumę kwadratów elementów zbioru X.

Wystarczy udowodnić, że istnieją takie dwa *różne* podzbiory C i D zbioru $\{n_1, n_2, \ldots, n_{2000}\}$, dla których $s_i(C) = s_i(D)$ dla $i = 0,1,2$. Wówczas zbiory $A = C \setminus D$ oraz $B = D \setminus C$ są niepuste i spełniają warunki zadania.

Dla dowolnego podzbioru X zbioru $\{n_1, n_2, \ldots, n_{2000}\}$ mamy

(1) $\quad s_0(X) < 10^4,\ s_1(X) < 2000 \cdot 10^{100} < 10^{104},\ s_2(X) < 2000 \cdot 10^{200} < 10^{204}.$

Oznaczając $S(X) = s_0(X) + 10^4 s_1(X) + 10^{108} s_2(X)$ uzyskujemy

$$S(X) < 10^{313} < (10^3)^{105} < 2^{1050} < 2^{2000}.$$

Stąd istnieją takie dwa różne podzbiory C, D zbioru $\{n_1, n_2, \ldots, n_{2000}\}$, że $S(C) = S(D)$. Z nierówności (1) wynika, że $s_i(C) = s_i(D)$ dla $i = 0,1,2$, co kończy rozwiązanie zadania.

(*wp, jwr*)

* * *

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem:

`www.impan.gov.pl/~olimp/`