LII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia trzeciego

2 kwietnia 2001 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ i dowolnych liczb rzeczywistych nieujemnych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} i x_i \leqslant \binom{n}{2} + \sum_{i=1}^{n} x_i^i .$$

2. Dowieść, że suma odległości dowolnego punktu leżącego wewnątrz czworościanu foremnego o krawędzi 1 od jego wierzchołków jest nie większa niż 3.

3. Rozważamy ciąg (x_n) określony rekurencyjnie wzorami

$$x_1 = a, \quad x_2 = b \quad \text{oraz} \quad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots ,$$

gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi.

Liczbę c będziemy nazywać *wartością wielokrotną* ciągu (x_n), jeżeli istnieją co najmniej dwie różne liczby całkowite dodatnie k i l takie, że $x_k = x_l = c$. Wykazać, że można tak dobrać liczby a i b, aby ciąg (x_n) miał więcej niż 2000 wartości wielokrotnych, ale nie można tak dobrać a i b, aby miał on nieskończenie wiele wartości wielokrotnych.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
4. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
5. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
6. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów.

LII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia trzeciego

3 kwietnia 2001 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dane są takie liczby całkowite a i b, że dla każdej liczby całkowitej nieujemnej n liczba $2^n a+b$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Dowieść, że $a=0$.

5. Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$, przy czym $BK\cdot AD=DL\cdot AB$. Odcinki DK i BL przecinają się w punkcie P. Wykazać, że $\sphericalangle DAP=\sphericalangle BAC$.

6. Dane są liczby całkowite dodatnie $n_1<n_2<\ldots<n_{2000}<10^{100}$. Dowieść, że ze zbioru $\{n_1,n_2,\ldots,n_{2000}\}$ można wybrać niepuste rozłączne podzbiory A i B mające tyle samo elementów, taką samą sumę elementów i taką samą sumę kwadratów elementów.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
4. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
5. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
6. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów.