O KWANTOWYCH UKŁADACH DYNAMICZNYCH Z PUNKTU WIDZENIA NIEPRZEMIENNEJ MATEMATYKI

ADAM SKALSKI

Streszczenie. Punktem wyjścia 'kwantowej' czy 'nieprzemiennej' matematyki jest obserwacja, że wiele własności klasycznych obiektów daje się wyrazić w języku algebr funkcji na nich określonych. W tym wykładzie pokażemy na kilku przykładach, jak prowadzi to do badania 'kwantowych' układów dynamicznych rozumianych jako endomorfizmy pewnych algebr operatorowych, koncentrując się na odpowiednikach klasycznego pojęcia entropii topologicznej i klasycznych twierdzeń ergodycznych.

Wiosenna Szkoła z Układów Dynamicznych
5-8 maja 2011, Będlewo

Plan wykładów

Wykład 1 **Nieprzemienna matematyka i definicja kwantowych/nieprzemiennych układów dynamicznych**: ogólna koncepcja 'nieprzemiennej matematyki'; C^*-algebry i kwantowe topologiczne układy dynamiczne; algebry Cuntza.

Wykład 2 **Nieprzemienna entropia topologiczna Voiculescu**: endomorfizmy algebr Cuntza; klasyczna entropia topologiczna według Bowena; definicja nieprzemiennej entropii topologicznej Voiculescu i jej podstawowe własności.

Wykład 3 **Entropia Voiculescu kwantowego przesunięcia**: oszacowanie entropii Voiculescu endomorfizmów permutacyjnych algebr Cuntza; entropia kwantowego przesunięcia.

Wykład 4 **Kwantowe 'miarowe' układy dynamiczne**: algebry von Neumanna i kwantowe 'miarowe' układy dynamiczne; niemal jednostajne twierdzenie ergodyczne Lance'a i uwagi o jego uogólnieniach.

1. Wykład 1

Problematyka kwantowych czy nieprzemiennych układów dynamicznych może być rozumiana w rozmaity sposób – aby się o tym przekonać wystarczy przyjrzeć się kilku z blisko 1400 artykułów oznaczonych symbolem MSC 46L53 (odpowiadającym kategorii 'Noncommutative dynamical systems') dostępnych w bazie Mathematical Reviews. W tych wykładach zaprezentujemy podejście motywowane czysto matematycznie, choć oczywiście wywodzące się historycznie z mechaniki kwantowej i wciąż blisko związane z fizyką matematyczną. U jego podstaw leży filozofia *nieprzemiennej matematyki*. Osobom zainteresowanym fizycznymi interpretacjami rozważanych niżej problemów polecamy książkę [AF].

1.1. Nieprzemienna matematyka – twierdzenie Gelfanda-Najmarka.

Definicja 1.1. Algebrę Banacha A z inwolucją (czyli algebrę z inwolucją $^* : \mathsf{A} \to \mathsf{A}$, wyposażoną w normę taką, że jako przestrzeń unormowana A jest zupełna, inwolucja jest izometrią oraz norma jest submultiplikatywna) nazywamy C^*-algebrą jeśli

$$\|a^*a\| = \|a\|^2, \quad a \in \mathsf{A}.$$

Dowody ogólnych faktów dotyczących C^*-algebr, z których będziemy korzystać niżej można znaleźć na przykład w monografii [Mu]. Wszystkie algebry rozważane w naszych wykładach będą algebrami z jedynką. Przykładem C^*-algebry jest M_n, algebra macierzy n na n o współczynnikach zespolonych z normą operatorową (każdą macierz utożsamiamy z operatorem liniowym działającym na przestrzeni Hilberta $\mathbb{C}^n$). Ogólniej jeśli H jest przestrzenią Hilberta, to $B(\mathsf{H})$, algebra wszystkich operatorów ograniczonych na H, jest C^*-algebrą. Inny przykład to algebra funkcji ciągłych o wartościach zespolonych na zwartej przestrzeni topologicznej X, którą będziemy oznaczać $C(X)$ (będziemy zakładać, że wszystkie rozważane przestrzenie zwarte są przestrzeniami Hausdorffa).

Twierdzenie 1.2 (Gelfand-Najmark, 1943)**.** *Każda przemienna C^*-algebra z jedynką A jest izometrycznie izomorficzna z algebrą $C(X_\mathsf{A})$ dla pewnej zwartej przestrzeni topologicznej X_A. Jeśli Y jest zwartą przestrzenią topologiczną, to algebry A i $C(Y)$ są izometrycznie izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy X_A i Y sa homeomorficzne.*

1.2. Kwantowe topologiczne układy dynamiczne i pewne własności odwzorowań między C^*-algebrami.

Jeśli X i Y są przestrzeniami zwartymi i $T : X \to Y$ jest ciągłe, to w naturalny sposób otrzymujemy przekształcenie $\alpha_T : C(Y) \to C(X)$ określone wzorem:

$$\alpha_T(f) = f \circ T, \ \ f \in C(Y).$$

Zwróćmy uwagę na 'odwrócenie strzałek':

$$\begin{array}{cccccc} T: & X & \to & Y & \\ & C(X) & \leftarrow & C(Y) & : \alpha_T. \end{array}$$

Odwzorowanie α_T jest *-homomorfizmem zachowującym jedynkę. Okazuje się ponadto, że każde odwzorowanie $\alpha : C(Y) \to C(X)$ spełniajace te warunki pochodzi od dokładnie jednego przekształcenia ciągłego X w Y. Tak więc "klasyczna" teoria zwartych przestrzeni topologicznych i ciągłych przekształceń między nimi jest w naturalny sposób równoważna teorii przemiennych C^*-algebr z jedynką i działających między nimi *-homomorfizmów zachowujących jedynki (rozważanie przemiennych C^*-algebr niekoniecznie posiadających jedynkę odpowiada zaś badaniu przestrzeni lokalnie zwartych).

Definicja 1.3. Kwantowym (czy nieprzemiennym) układem dynamicznym nazywamy parę (A, α), gdzie A jest C^*-algebrą z jedynką, a $\alpha : \mathsf{A} \to \mathsf{A}$ jest zachowującym jedynkę *-homomorfizmem.

Będziemy rozważać wyłącznie dynamikę dyskretną (pojedynczy *-homomorfizm). Oczywiście można badać również kwantowe układy dynamiczne indeksowane parametrami z $\mathbb{R}_+$ czy $\mathbb{R}$, i rozumiane jako odpowiednie półgrupy czy grupy homomorfizmów A. W mechanice kwantowej najważniejszą rolę tradycyjnie odgrywały automorfizmy algebry $B(\mathsf{H})$ zadane wzorem $a \mapsto U^*aU$, gdzie $U \in B(\mathsf{H})$ jest operatorem unitarnym ($UU^* = U^*U = 1$).

Element C^*-algebry A nazywamy *dodatnim* jeśli można go zapisać w postaci b^*b dla pewnego $b \in \mathsf{A}$. Zbiór elementów dodatnich, oznaczany przez A_+, jest stożkiem w A; ponadto jeśli $a, b \in \mathsf{A}_+$ to $\|a + b\| \geqslant \|a\|$. Odwzorowanie liniowe między dwoma C^*-algebrami nazywamy *dodatnim*, jeśli przekształca elementy dodatnie na dodatnie. W szczególności możemy mówić o funkcjonałach dodatnich; nietrudno pokazać, że funkcjonał dodatni jest automatycznie ciągły.

Definicja 1.4. Stanem na C^*-algebrze nazywamy każdy dodatni fukcjonał liniowy $\omega : \mathsf{A} \to \mathbb{C}$ taki, że $\omega(1) = 1$.

Stany odgrywają rolę kwantowych miar probabilistycznych – twierdzenie Riesza mówi, że istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między stanami na $C(X)$ a Borelowskimi regularnymi miarami probabilistycznymi na X.

Każdy *-homomorfizm z C^*-algebry A do algebry $B(\mathsf{H})$ nazywa się *reprezentacją*. Mówimy, że reprezentacja $\pi : \mathsf{A} \to B(\mathsf{H})$ jest *wierna*, jeśli jest różnowartościowa (jest wtedy automatycznie izometrią; ponadto każdy *-homomorfizm między C^*-algebrami jest kontraktywny). Inne twierdzenie Gelfanda-Najmarka mówi, że każda C^*-algebra ma reprezentację wierną. Innymi słowy, każda C^*-algebra jest (izomorficzna z) domkniętą w normie *-podalgebrą $B(\mathsf{H})$.

Wykorzystując twierdzenie o istnieniu wiernej reprezentacji można pokazać, że jeśli A jest C^*-algebrą, to algebra $M_n(\mathsf{A})$ macierzy n na n o współczynnikach w A ma naturalną strukturę C^*-algebry, co okazuje się odgrywać w teorii ważną rolę. Jeśli A, B są C^*-algebrami i $T : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ jest odwzorowaniem liniowym, to aplikując T osobno do każdego wyrazu w macierzy otrzymujemy liniowe odwzorowanie $T^{(n)} : M_n(\mathsf{A}) \to M_n(\mathsf{B})$. Mówimy, że T jest *całkowicie dodatnie*, jeśli $T^{(n)}$ jest dodatnie dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Uwaga 1.5. Każdy *-homomorfizm jest całkowicie dodatni. Ponadto jeśli A bądź B jest przemienna, a $T : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ jest odwzorowaniem dodatnim, to automatycznie T jest całkowicie dodatnie.

Twierdzenie 1.6 (Twierdzenie Arvesona o rozszerzaniu)**.** *Niech H będzie przestrzenią Hilberta, A – C^*-algebrą, a B – C^*-podalgebrą A. Jeśli $T : \mathsf{B} \to B(\mathsf{H})$ jest całkowicie dodatnie, to istnieje odwzorowanie całkowicie dodatnie $\widetilde{T} : \mathsf{A} \to B(\mathsf{H})$ takie, że $\widetilde{T}|_{\mathsf{B}} = T$ i $\|T\| = \|\widetilde{T}\|$.*

Twierdzenie powyższe nazywa się czasem kwantowym/nieprzemiennym twierdzeniem Hahna-Banacha.

Uwaga 1.7. Często wygodnie jest używać naturalnego izomorfizmu $M_n(\mathsf{A})$ z $M_n \otimes \mathsf{A}$. Jeśli $T : \mathsf{A} \to \mathsf{A}$, to odwzorowaniu $T^{(n)} : M_n(\mathsf{A}) \to M_n(\mathsf{A})$ odpowiada odwzorowanie $\mathrm{id}_{M_n} \otimes T : M_n \otimes \mathsf{A} \to M_n \otimes \mathsf{A}$.

1.3. **Algebry Cuntza.** C^*-algebry są zazwyczaj definiowane bądź *abstrakcyjnie*, jako uzupełnienia pewnych *-algebr w podanej normie spełniającej warunek 'C^*', bądź *konkretnie*, czyli jako podalgebry $B(\mathsf{H})$. Niżej podamy przykład algebry definiowanej abstrakcyjnie.

Definicja 1.8 ([Cu$_1$])**.** Niech $N \in \mathbb{N}$. Rozważmy *-algebrę $\mathcal{A}_N$ z jedynką generowaną przez N elementów $S_1, \ldots, S_N$ spełniających następujące relacje:

$$S_i^* S_j = \delta_{i,j} 1_{\mathcal{A}_N}, \quad \sum_{i=1}^{n} S_i S_i^* = 1_{\mathcal{A}_N}.$$

Algebrą Cuntza $\mathcal{O}_N$ nazywamy uzupełnienie $\mathcal{A}_N$ w normie

$$\|x\| = \sup\{\|\pi(x)\| : \pi -^* \text{-homomorfizm z } \mathcal{A}_N \text{ do } B(\mathsf{H})\}.$$

Innymi słowy, algebra Cuntza to uniwersalna C^*-algebra generowana przez N izometrii o ortogonalnych obrazach w sumie dających całą przestrzeń Hilberta. Zauważmy, że to, że wzór powyżej faktycznie określa normę na $\mathcal{A}_N$ (a nie tylko półnormę) wymaga dowodu.

Niech $\mathcal{J}_k = \{1, \ldots, N\}^k$ oznacza zbiór multindeksów o długości k i wartościach w $\{1, \ldots, N\}$. Niech dla $\mu \in \mathcal{J}_k$

$$S_\mu := S_{\mu_1} S_{\mu_2} \ldots S_{\mu_k},$$
$$|\mu| = k.$$

Twierdzenie 1.9 ([Cu$_1$])**.** *Algebra $\mathcal{O}_N$ jest* prosta*, to znaczy nie posiada żadnych nietrywialnych ideałów; w szczególności każda C^*-algebra generowana przez N izometrii na pewnej przestrzeni Hilberta H, których obrazy są wzajemnie ortogonalne i w sumie dają całą przestrzeń H jest izomorficzna z $\mathcal{O}_N$. Zbiór*

$$\mathrm{Lin}\, \{S_\mu S_\nu^* : \mu \in \mathcal{J}_k, \nu \in \mathcal{J}_l, k, l \in \mathbb{N}\}$$

jest gęstą *-podalgebrą $\mathcal{O}_N$.

Będą nas też interesować dwie inne podalgebry $\mathcal{O}_N$:

$$\mathcal{F}_N = \overline{\mathrm{Lin}}\, \{S_\mu S_\nu^* : \mu \in \mathcal{J}_k, \nu \in \mathcal{J}_k, k \in \mathbb{N}\},$$
$$\mathcal{C}_N = \overline{\mathrm{Lin}}\, \{S_\mu S_\mu^* : \mu \in \mathcal{J}_k, k \in \mathbb{N}\}.$$

Rozważmy teraz zbiór Cantora w postaci zadanej przez rodzinę nieskończonych słów o literach z alfabetu $\{1, \ldots, N\}$:

$$\mathfrak{C}_N = \{w = (w_k)_{k=1}^\infty : \forall_{k \in \mathbb{N}}\, w_k \in \{1, \ldots, N\}\}.$$

Zbiór $\mathfrak{C}_N$ jest wyposażony w naturalną metrykę

$$d(w, v) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli} \quad w = v, \\ \frac{1}{k} & \text{jeśli} \quad w_k \neq v_k,\ w_i = v_i \text{ dla } i < k. \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że $\mathfrak{C}_N$ jest z metryką d przestrzenią zwartą (z topologią odpowiadającą topologii Tichonowa niekończonego iloczynu kartezjańskiego).

Twierdzenie 1.10. *Odwzorowanie przyporządkowujące elementowi $S_\mu S_\mu^*$ ($\mu \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{J}_k$) funkcję charakterystyczną zbioru $\{w \in \mathfrak{C}_N : (w_n)_{n=1}^{|\mu|} = \mu\}$ zadaje *-izomorfizm $\mathcal{C}_N$ i $C(\mathfrak{C}_N)$, oznaczany dalej przez γ.*

Dowód. Ćwiczenie. □

Możemy więc myśleć o $\mathcal{O}_N$ jako pewnym 'nieprzemiennym rozszerzeniu' algebry funkcji ciągłych na zbiorze Cantora.

Zadanie 1.1. Pokaż, że $\mathrm{Lin}\{S_\mu S_\nu^* : \mu \in \mathcal{J}_k, \nu \in \mathcal{J}_k, k \in \mathbb{N}\}$ jest sumą wstępującą ciągu skończeniewymiarowych *-algebr z jedynką $\mathcal{F}_N^l = \mathrm{Lin}\{S_\mu S_\nu^* : \mu \in \mathcal{J}_k, \nu \in \mathcal{J}_k, k \leqslant l\}$ ($l \in \mathbb{N}$). Zinterpretuj $\mathrm{Lin}\{S_\mu S_\mu^* : \mu \in \mathcal{J}_k, k \leqslant l\}$ jako podalgebrę $\mathcal{F}_N^l$.

2. Wykład 2

2.1. **Endomorfizmy algebr Cuntza i kwantowe przesunięcie.**

Będą nas interesować zachowujące jedynkę endomorfizmy algebry Cuntza. Z twierdzenia 1.9 wynika, że są one automatycznie różnowartościowe.

Twierdzenie 2.1 ([Cu$_2$])**.** *Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między unitarnymi elementami $\mathcal{O}_N$ (czyli elementami $U \in \mathcal{O}_N$ takimi, że $U^*U = UU^* = 1_{\mathcal{O}_N}$) a endomorfizmami $\mathcal{O}_N$. Jest ona zadana wzorami:*

$$U_\rho = \sum_{i=1}^{N} \rho(S_i) S_i^*,$$

$$\rho_U(S_i) = US_i, \quad i = 1, \ldots, N$$

Dowód. Prosty rachunek. Zauważmy, że to, że drugi wzór wyznacza dobrze określony *-homomorfizm z $\mathcal{O}_N$ do $\mathcal{O}_N$ wynika z uniwersalnej własności $\mathcal{O}_N$. □

Szczególnym przypadkiem endomorfizmów $\mathcal{O}_N$ są tak zwane *endomorfizmy permutacyjne*, zdefiniowane najpierw w [Ka]. Istotnie, niech $k \in \mathbb{N}$ i niech $\sigma : \mathcal{J}_k \to \mathcal{J}_k$ będzie permutacją. Zdefiniujmy operator unitarny U^σ wzorem

$$U^\sigma = \sum_{\mu\in\mathcal{J}_k} S_\mu S_{\sigma(\mu)}^*. \tag{2.1}$$

Odpowiadający U^σ endomorfizm $\mathcal{O}_N$ nazywamy endomorfizmem permutacyjnym i oznaczamy ρ_σ.

Zadanie 2.1. Sprawdź, że wzór (2.1) w istocie definiuje operator unitarny. Wykaż, że każdy endomorfizm permutacyjny odwzorowuje $\mathcal{C}_N$ w $\mathcal{C}_N$.

Definicja 2.2. Endomorfizmem przesunięcia nazywamy endomorfizm $\mathcal{O}_N$ zadany wzorem:

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^{N} S_i X S_i^*, \quad X \in \mathcal{O}_N. \tag{2.2}$$

Stwierdzenie 2.3. *Endomorfizm przesunięcia jest endomorfizmem permutacyjnym zadanym przez 'transpozycję' $\sigma : \mathcal{J}_2 \to \mathcal{J}_2$, $\sigma(i,j) = (j,i)$ dla $i,j = 1,\ldots N$.*

Dowód. Wystarczy zauważyć, że dla każdego $i = 1, \ldots, N$

$$\rho_\sigma(S_i) = \sum_{j,k=1}^{N} S_j S_k (S_k S_j)^* S_i = \sum_{j=1}^{N} S_j S_i S_j^* = \Phi(S_i).$$

□

Twierdzenie 2.4. *Niech T oznacza przesunięcie lewostronne na zbiorze $\mathfrak{C}_N$ zadane wzorem*

$$T((w_k)_{k=1}^{\infty})_l = w_{l+1}, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Obcięcie endomorfizmu przesunięcia do algebry $\mathcal{C}_N$ jest odwzorowaniem indukowanym przez T: precyzyjnie mówiąc:

$$\gamma \circ \Phi|_{\mathcal{C}_N} = \alpha_T \circ \gamma.$$

Dowód. Tym razem wystarczy sprawdzić, że dla każdego $\mu \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{J}_k$ zachodzi równość $\gamma(\Phi(S_\mu S_\mu^*)) = \alpha_T(Z_\mu)$. Dokładną analizę pozostawiamy jako (pouczające!) ćwiczenie. □

Zadanie 2.2. Czy identyczność na $\mathcal{O}_N$ jest endomorfizmem permutacyjnym? Czy przesunięcie Φ jest automorfizmem? Jakie inne naturalne klasy operatorów unitarnych w $\mathcal{O}_N$ możemy rozważać (na przykład korzystając z Zadania 1.1)?

2.2. **Entropia topologiczna – definicja Rufusa Bowena.** Niech (X, d) będzie zwartą przestrzenią metryczną, $T : X \to X$ przekształceniem ciągłym. Skończony zbiór $F \subset\subset X$ będziemy nazywać (n, ϵ)-*rozpinającym* dla T ($n \in \mathbb{N}, \epsilon > 0$) jeśli

$$\forall_{x \in X}\, \exists_{f \in F}\, \forall_{k=0,\ldots,n-1}\, d(T^k x, T^k f) < \epsilon.$$

Zbiory (n, ϵ)-rozpinające zawsze istnieją (jest to konsekwencja zwartości X i ciągłości T). Można więc zdefiniować liczbę

$$s(n, \epsilon) = \min\{\mathrm{card}(F) : F - (n, \epsilon) - \text{ rozpinający podzbiór } X\}.$$

Wszędzie poniżej symbol $F \subset\subset X$ będzie oznaczał, że F jest skończonym podzbiorem X.

Definicja 2.5. Entropią topologiczną odwzorowania T nazywamy liczbę

$$h_{\mathrm{top}}(T) = \sup_{\epsilon > 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log s(n, \epsilon).$$

Idea definicji Bowena opiera się na przybliżaniu badanego układu (w pierwszych n krokach, z dokładnością do ϵ) układem skończonym. Niżej zastosujemy podobny pomysł do zdefiniowania entropii kwantowych układów dynamicznych. Zauważmy ponadto, że w definicji Bowena granicę górną można zastąpić przez granicę dolną ([Wa]).

2.3. **Skończeniewymiarowe aproksymacje w teorii C^*-algebr.** Niech A będzie C^*-algebrą z jedynką. Notacja $(\phi, \psi, M_n) \in CPA(\mathsf{A})$ będzie oznaczać, że $\phi : M_n \to \mathsf{A}$, $\psi : \mathsf{A} \to M_n$ są liniowymi, zachowującymi jedynkę odwzorowaniami całkowicie dodatnimi.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{A} \arrow[rr, dotted, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\psi"'] & & \mathsf{A} \\
& M_n \arrow[ur, "\phi"'] &
\end{tikzcd}$$

Ponadto dla $\Omega \subset\subset \mathsf{A}$ i $\epsilon > 0$ będziemy pisać $(\phi, \psi, M_n) \in CPA(\mathsf{A}, \Omega, \epsilon)$ jeśli $(\phi, \psi, M_n) \in CPA(\mathsf{A})$ i

$$\forall_{a\in\Omega} \ \|\phi \circ \psi(a) - a\| < \epsilon.$$

Ostatni warunek oznacza, że powyższy diagram jest 'przemienny na Ω z dokładnością do ϵ'.

Definicja 2.6. Algebrę A nazywamy *nuklearną*, jeśli $CPA(\mathsf{A}, \Omega, \epsilon) \neq \emptyset$ dla dowolnych $\Omega \subset\subset \mathsf{A}, \epsilon > 0$. Wtedy można zdefiniować

$$\mathrm{rcp}(\Omega, \epsilon) := \min\{n \in \mathbb{N} : \ (\phi, \psi, M_n) \in CPA(\mathsf{A}, \Omega, \varepsilon)\}.$$

Przemienne C^*-algebry są nuklearne (co udowodnimy niżej). Podobnie algebra Cuntza.

2.4. **Nieprzemienna entropia topologiczna Voiculescu.**

Definicja 2.7 ([Vo])**.** Niech (A, α) będzie kwantowym układem dynamicznym i załóżmy, że A jest nuklearna. Nieprzemienną topologiczną entropią α nazywamy liczbę

$$\mathrm{ht}\, \alpha = \sup_{\epsilon>0,\, \Omega\subset\subset\mathsf{A}} \ \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \log \mathrm{rcp}(\Omega^{(n)}, \epsilon)\right)$$

(tu i wszędzie poniżej używamy oznaczenia $\Omega^{(n)} = \bigcup_{j=0}^{n-1} \alpha^j(\Omega)$).

Podstawowe własności $\mathrm{ht}\, \alpha$:

- ([Vo]) jeśli $(\mathsf{A}, \alpha) = (C(X), \alpha_T)$, a X jest zwartą przestrzenią metryczną, to
$$\mathrm{ht}\, \alpha_T = h_{\mathrm{top}}(T).$$
- ([Br]) ht nie wzrasta przy przechodzeniu do podalgebr niezmienniczych: jeśli B jest C^*-podalgebrą A, taką, że $\alpha(\mathsf{B}) \subset \mathsf{B}$, to $\mathrm{ht}\, \alpha|_{\mathsf{B}} \leqslant \mathrm{ht}\, \alpha$.

Żaden z powyższych faktów nie jest trywialny; drugi wymaga w istocie pewnego przeformułowania definicji (podalgebra algebry nuklearnej nie musi być nuklearna). Pokażemy wyłącznie dowód nierówności

$$\mathrm{ht}\, \alpha_T \leqslant h_{\mathrm{top}}(T). \tag{2.3}$$

Dowód nierówności (2.3). Przypuśćmy, że (X, d) jest zwartą przestrzenią metryczną, $T : X \to X$ jest ciągłe. Ustalmy $\epsilon > 0$ i skończony zbiór $\Omega \subset C(X)$. Ze zwartości X i skończoności Ω wynika, że istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$\forall_{f\in\Omega} \, \forall_{x,y\in X} \ \ d(x, y) < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Niech $F = \{x_1, \dots, x_k\}$ będzie zbiorem (n, δ)-rozpinającym dla T takim, że $k = s(n, \delta)$. Dla każdego $i = 1, \dots, k$ niech

$$U_i = \{x \in X : \forall_{j=0,\dots,n-1} \ d(T^j(x_i), T^j(x)) < \delta\}.$$

Rodzina $(U_i)_{i=1}^k$ jest pokryciem otwartym X. Niech $(\varphi_i)_{i=1}^k$ będzie odpowiadającym mu rozkładem jedynki, to znaczy rodziną funkcji z $C(X)$ taką, że każda φ_i jest nieujemna, ma nośnik zawarty w U_i i ponadto $\sum_{i=1}^k \varphi_i = 1$.

Zdefiniujmy odwzorowania liniowe $\psi : C(X) \to M_k$ i $\phi : M_k \to C(X)$ wzorami

$$\psi(f) = \mathrm{diag}[f(x_1), \dots, f(x_k)], \quad f \in C(X),$$

$$\phi([a_{ij}]_{i,j=1}^k) = \sum_{i=1}^k a_{ii}\varphi_i, \quad [a_{ij}]_{i,j=1}^k \in M_k.$$

Łatwo sprawdzić, że ψ i ϕ są liniowymi, dodatnimi odwzorowaniami zachowującymi jedynki. Na mocy Uwagi 1.5 mamy więc $(\phi, \psi, M_k) \in CPA(C(X))$.

Niech więc $g \in \Omega^{(n)} = \bigcup_{j=0}^{n-1} \alpha_T^j(\Omega)$, powiedzmy $g = \alpha_T^j(f)$. Wtedy dla dowolnego $x \in X$

$$\begin{aligned}
|(\phi \circ \psi)(g)(x) - g(x)| &= |\sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x) g(x_i) - g(x)| \\
&= |\sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x)(g(x_i) - g(x))| \leqslant \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x)|g(x_i) - g(x)| \\
&= \sum_{i=1,\ldots,k \text{ t., że } x \in U_i} \varphi_i(x)|g(x_i) - g(x)| < \epsilon,
\end{aligned}$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z tego, że $g(x_i) - g(x) = f(T^j(x_i)) - f(T^j(x))$ i jeśli $x \in U_i$, to $d(T^j(x_i), T^j(x)) < \delta$. Udowodniliśmy więc, że $(\phi, \psi, M_k) \in CPA(C(X), \Omega^{(n)}, \epsilon)$, a więc $\mathrm{rcp}(\Omega^{(n)}, \epsilon) \leqslant k = s(n, \delta)$.

Stąd łatwo wynika nierówność (2.3). □

Zadanie 2.3. Wykaż, że jeśli X jest przestrzenią zwartą, to $C(X)$ jest nuklearna. Czy potrzeba zakładać, że X jest metryzowalna?

Podanie elementarnego dowodu nierówności

$$\mathrm{ht}\, \alpha_T \geqslant h_{\mathrm{top}}(T)$$

okazuje się zaskakująco trudne – do dziś jedyny dowód tej nierówności pochodzi z pracy [Vo] i wykorzystuje tak zwaną entropię CNT (Connes-Narnhofer-Thirring), kwantową wersję entropii miarowej. Nie wiadomo też, czy w definicji Voiculescu granicę górną można bez zmiany wartości entropii zastąpić granicą dolną.

Będziemy potrzebować jeszcze jednej własności entropii Voiculescu.

Stwierdzenie 2.8 (Własność Kołmogorowa-Sinaja, [Vo])**.** *Niech A będzie nuklearną C^*-algebrą, $\alpha : \mathsf{A} \to \mathsf{A}$ zachowującym jedynkę *-homomorfizmem. Jeśli $(\Omega_i)_{i \in I}$ jest rodziną skończonych podzbiorów A taką, że $\bigcup_{i \in I, n \in \mathbb{N}} \Omega_i^{(n)}$ jest liniowo gęsty w A, to*

$$\mathrm{ht}\, \alpha = \sup_{\epsilon > 0,\, i \in I} \limsup_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} \log \mathrm{rcp}(\Omega_i^{(n)}, \epsilon) \right).$$

Zauważmy, że do stosowania powyższej własności wystarczy, że $\bigcup_{i \in I} \Omega_i$ jest liniowo gęsty w A.

3. Wykład 3

3.1. **Entropia Voiculescu kwantowego przesunięcia.** Głównym celem tej części wykładów jest udowodnienie następującego oszacowania dla endomorfizmów permutacyjnych $\mathcal{O}_N$.

Twierdzenie 3.1. *([SZ]) Ustalmy $N \in \mathbb{N}$, niech $k \in \mathbb{N}$ i niech $\sigma : \mathcal{J}_k \to \mathcal{J}_k$ będzie permutacją. Oznaczmy odpowiadający σ (za pomocą wzoru* (2.1) *i Twierdzenia 2.1) endomorfizm permutacyjny $\mathcal{O}_N$ przez ρ. Wtedy*

$$\mathrm{ht}\, \rho \leqslant (k-1) \log N. \tag{3.1}$$

Twierdzenie udowodnimy przy użyciu ciągu lematów, w których stale będziemy pracować z ustalonymi N i k. Oznaczmy dla $i, j \in \mathbb{N}$

$$A_{i,j} = \{S_\mu S_\nu^* : \mu \in \mathcal{J}_i, \nu \in \mathcal{J}_j\}, \quad F_{i,j} = \mathrm{Lin} A_{i,j}$$

Lemat 3.2. *Przy oznaczeniach z Twierdzenia 3.1 mamy dla dowolnych $i, j, m \in \mathbb{N}$*

$$\rho^m(A_{i,j}) \subset F_{i+m(k-1),j+m(k-1)}.$$

Dowód. Wystarczy udowodnić zawieranie dla $m = 1$. Niech więc $\mu \in \mathcal{J}_i$, $\nu \in \mathcal{J}_j$. Wtedy

$$\rho(S_\mu) = U_\sigma S_{\mu_1} \cdots U_\sigma S_{\mu_i} \in F_{k,k-1} \cdots F_{k,k-1} \subset F_{k+i-1,k-1}$$

i podobnie

$$\rho(S_\nu)^* \in F_{k-1,k+j-1}.$$

Stąd wynika, że

$$\rho(S_\mu S_\nu^*) \in F_{k+i-1,k+j-1}.$$

□

Wprowadźmy dla każdego $l \in \mathbb{N}$ następujący (różnowartościowy) *-homomorfizm $\Psi_l : \mathcal{O}_N \to M_{N^l}(\mathcal{O}_N)$:

$$\Psi_l(X) = \sum_{\mu,\nu \in \mathcal{J}_l} e_{\mu,\nu} \otimes S_\mu^* X S_\nu, \quad X \in \mathcal{O}_N. \tag{3.2}$$

W powyższej notacji utożsamiamy algebrę $M_{N^l}(\mathcal{O}_N)$ z iloczynem tensorowym $M_{N^l} \otimes \mathcal{O}_N$, indeksujemy zbiór $\{1, \ldots, N^l\}$ przez multindeksy z $\mathcal{J}_l$ i oznaczamy przez $e_{\mu,\nu}$ macierz mającą jedynkę w 'μ'-tym wierszu i 'ν'-tej kolumnie, wszędzie indziej zera.

Zadanie 3.1. Sprawdź, że wzór (3.2) w istocie zadaje zachowujący jedynkę *-homomorfizm.

Lemat 3.3. *Niech $l, i, j \in \mathbb{N}$, $l \geqslant i > j$. Niech $X \in F_{i,j}$. Wtedy dla każdego $\mu \in \mathcal{J}_{i-j}$ istnieje $T_\mu \in M_{N^l}$ takie, że $\|T_\mu\| \leqslant \|X\|$ i*

$$\Psi_l(X) = \sum_{\mu \in \mathcal{J}_{i-j}} T_\mu \otimes S_\mu. \tag{3.3}$$

Dowód. Aby wykazać istnienie macierzy T_μ (bez warunku normowego), wystarczy zobaczyć, co dzieje się dla $X \in A_{i,j}$. Wtedy jednak, dla $\nu \in \mathcal{J}_i$, $\kappa \in \mathcal{J}_j$, mamy

$$\begin{aligned}\Psi_l(S_\nu S_\kappa^*) &= \sum_{\beta,\delta \in \mathcal{J}_l} e_{\beta,\delta} \otimes S_\beta^* S_\nu S_\delta^* S_\kappa = \sum_{\beta' \in \mathcal{J}_{l-i}, \delta' \in \mathcal{J}_{l-j}} e_{\nu\beta',\kappa\delta'} \otimes S_{\beta'}^* S_{\delta'} \\ &= \sum_{\mu \in \mathcal{J}_{i-j}} \Big(\sum_{\beta' \in \mathcal{J}_{l-i}} e_{\nu\beta',\kappa\beta'\mu} \Big) \otimes S_\mu.\end{aligned}$$

Pozostaje udowodnić oszacowanie na normę każdej z macierzy T_μ występującej w formule (3.3).

$$\begin{aligned}\Big\| \sum_{\mu \in \mathcal{J}_{i-j}} T_\mu \otimes S_\mu \Big\|^2 &= \Big\| \sum_{\mu \in \mathcal{J}_{i-j}} (T_\mu \otimes S_\mu)^* \sum_{\nu \in \mathcal{J}_{i-j}} (T_\nu \otimes S_\nu) \Big\| \\ &= \Big\| \sum_{\mu,\nu \in \mathcal{J}_{i-j}} T_\mu^* T_\nu \otimes S_\mu^* S_\nu \Big\| = \Big\| \sum_{\mu \in \mathcal{J}_{i-j}} T_\mu^* T_\mu \Big\|,\end{aligned}$$

a więc dla każdego $\mu \in \mathcal{J}_{i-j}$

$$\|T_\mu\|^2 = \|T_\mu^* T_\mu\| \leqslant \|\sum_{\nu \in \mathcal{J}_{i-j}} T_\nu \otimes S_\nu\|^2 = \|\Psi_l(X)\|^2. \tag{3.4}$$

Ponieważ Ψ_l jest różnowartościowym *-homomorfizmem, mamy

$$\|\Psi_l(X)\| = \|X\|,$$

co w połączeniu z (3.4) kończy dowód. □

Analogiczne lematy można udowodnić oczywiście dla przypadku $i = j$, $i < j$ (zawsze przy $i, j \geqslant l$) – proponujemy ich sformułowanie jako ćwiczenie.

Możemy rozpocząć dowód Twierdzenia 3.1.

Dowód Twierdzenia 3.1. Połóżmy dla każdego $l \in \mathbb{N}$

$$\Omega_l = \bigcup_{p,q=1}^{l} A_{p,q}.$$

Ustalmy $l \in \mathbb{N}$, $\epsilon > 0$. Ponieważ $\mathcal{O}_N$ jest nuklearna, istnieje pewna trójka $(\phi_0, \psi_0, M_{C_l}) \in CPA(\mathcal{O}_N, \Omega_l, \frac{1}{4N^l}\epsilon)$. Ustalmy teraz $n \in \mathbb{N}$ i niech

$$\Omega_l^{(n)} = \bigcup_{j=0}^{n} \rho^p(\Omega_l).$$

Połóżmy $m = n(k-1) + l$. Nuklearność $\mathcal{O}_N$ można wykorzystać również do przybliżania homomorfizmów: zastosujemy to teraz do $\Psi_m^{-1} : \Psi_m(\mathcal{O}_N) \to \mathcal{O}_N$. Tak więc istnieją $d \in \mathbb{N}$ i całkowicie dodatnie zachowujące jedynkę odwzorowania $\gamma : \Psi_m(\mathcal{O}_N) \to M_d$ oraz $\eta : M_d \to \mathcal{O}_N$ takie, że dla wszystkich $a \in \Psi_m(\Omega_l^{(n)})$,

$$\|\eta \circ \gamma(a) - \Psi_m^{-1}(a)\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Niech $\widetilde{\gamma} : M_{N^m} \otimes \mathcal{O}_N \to M_d$ będzie całkowicie dodatnim rozszerzeniem γ (patrz Twierdzenie 1.6). Rozważmy następujący diagram:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_N \arrow[r, "\Psi_m"] \arrow[dddrr, "\psi"'] & \Psi_m(\mathcal{O}_N) & & \Psi_m(\mathcal{O}_N) \arrow[rr, "\Psi_m^{-1}"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & \mathcal{O}_N \\
& \rotatebox[origin=c]{-90}{$\subseteq$} & & \rotatebox[origin=c]{-90}{$\subseteq$} & M_d \arrow[ur, "\eta"'] & \\
& M_{N^m} \otimes \mathcal{O}_N \arrow[dr, "\mathrm{id} \otimes \psi_0"] & & M_{N^m} \otimes \mathcal{O}_N \arrow[ur, "\widetilde{\gamma}"'] & & \\
& & M_{N^m} \otimes M_{C_l} \arrow[ur, "\mathrm{id} \otimes \phi_0"] \arrow[uuurrr, "\phi"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Niech $X \in A_{p,q}$ $(p, q \leqslant l)$ i niech $j \in \mathbb{N}$, $j \leqslant n$. Wtedy

$$\begin{aligned}
&\|\phi \circ \psi(\rho^j(X)) - \rho^j(X)\| \\
&\quad = \|\eta \circ \widetilde{\gamma} \circ (\mathrm{id} \otimes \phi_0 \circ \psi_0) \circ \Psi_m(\rho^j(X)) - (\Psi_m^{-1} \circ \Psi_m)(\rho^j(X))\| \\
&\quad = \|\eta \circ \widetilde{\gamma} \circ (\mathrm{id} \otimes \phi_0 \circ \psi_0) \circ \Psi_m(\rho^j(X)) - \eta \circ \widetilde{\gamma} \circ \Psi_m(\rho^j(X)) \\
&\qquad\qquad + \eta \circ \widetilde{\gamma} \circ \Psi_m(\rho^j(X)) - (\Psi_m^{-1} \circ \Psi_m)(\rho^j(X))\| \\
&\quad \leqslant \|(\mathrm{id} \otimes \phi_0 \circ \psi_0) \circ \Psi_m(\rho^j(X)) - \Psi_m(\rho^j(X))\| + \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Z Lematu 3.2 wynika, że $\rho^j(X) \in F_{p+j(k-1),q+j(k-1)}$. Załóżmy na przykład, że $p > q$. Wtedy z Lematu 3.3, jako, że $\|X\| \leqslant 1$, wynika, że

$$\begin{aligned}\|\phi \circ \psi(\rho^j(X)) - \rho^j(X)\| &\leqslant \Big\| \sum_{\mu \in \mathcal{J}_{p-q}} T_\mu \otimes \big((\phi_0 \circ \psi_0)(S_\mu) - S_\mu\big) \Big\| + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leqslant \sum_{\mu \in \mathcal{J}_{p-q}} \|T_\mu\| \, \|(\phi_0 \circ \psi_0)(S_\mu) - S_\mu\| < N^{p-q} \frac{\epsilon}{4N^l} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\end{aligned}$$

(ponieważ $S_\mu \in A_{p-q,0} \in \Omega_l$). Wykazaliśmy więc, że

$$(\phi, \psi, M_{N^m} \otimes M_{C_l}) \in CPA(\mathcal{O}_N, \Omega_l^{(n)}, \epsilon). \tag{3.5}$$

Stąd $\operatorname{rcp}(\omega_l^{(n)}, \epsilon) \leqslant C_l N^m$,

$$\log \operatorname{rcp}(\Omega_l^{(n)}, \epsilon) \leqslant C_l + m \log N = C_l + ((k-1)n + l) \log N$$

i wreszcie

$$\limsup_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} \log \operatorname{rcp}(\Omega_l^{(n)}, \epsilon) \right) \leqslant (k-1) \log N.$$

Własność Kołmogorowa-Sinaja dla entropii Voiculescu kończy dowód. □

Powyższe twierdzenie jest uproszczoną wersją Twierdzenia 2.2 z pracy [SZ]. Jego dowód jest częściowo inspirowany pracą [BG]. W szczególności wynika z niego następujący wynik, pierwotnie udowodniony innymi metodami w [Ch].

Twierdzenie 3.4. ([Ch]) *Niech $N \in \mathbb{N}$ i niech $\Phi : \mathcal{O}_N \to \mathcal{O}_N$ będzie kwantowym przesunięciem. Wtedy* $\operatorname{ht} \Phi = \log N$.

Dowód. Twierdzenie 3.1 i Stwierdzenie 2.3 implikują, że

$$\operatorname{ht} \Phi \leqslant \log N.$$

Z kolei Twierdzenie 2.4 i monotoniczność entropii Voiculescu pozwalają stwierdzić, że

$$\operatorname{ht} \Phi \geqslant h_{\text{top}}(T),$$

gdzie T oznacza lewostronne przesunięcie na $\mathfrak{C}_N$. Ponieważ $h_{\text{top}} T = \log N$ ([Wa]), powyższe nierówności kończą dowód. □

Dowód powyższego twierdzenia jest przykładem typowej strategii obliczania entropii Voiculescu przy użyciu 'podukładów' klasycznych. Nawet w przypadku prostych endomorfizmów permutacyjnych algebr Cuntza sytuacja może być jednak bardziej skomplikowana.

Zadanie 3.2. Niech $N = 2$ i rozważmy endomorfizm $\rho : \mathcal{O}_2 \to \mathcal{O}_2$ zadany wzorem:

$$\rho(S_1) = S_1 S_2 S_1^* + S_1 S_1 S_2^*, \quad \rho(S_2) = S_2.$$

(i) Pokaż, że ρ jest endomorfizmem permutacyjnym. Wywnioskuj, że $\operatorname{ht} \rho \leqslant \log 2$.
(ii) Znajdź odwzorowanie T na zbiorze Cantora $\mathfrak{C}_2$ takie, że $\rho|_{\mathcal{C}_2}$ odpowiada α_T (w sensie wykorzystywanym w Twierdzeniu 2.4).
(iii) Pokaż, że $h_{\text{top}}(T) = 0$.
(iv) Spróbuj zastanowić się, jak można by pokazać, że

$$\operatorname{ht} \rho = \log 2. \tag{3.6}$$

Równość (3.6) została udowodniona w [SZ].

4. Wykład 4

4.1. **Konstrukcja GNS i przejście do kwantowych ‘miarowych’ układów dynamicznych.** Do tej pory analizowaliśmy wyłącznie kwantowe ‘topologiczne’ układy dynamiczne. Niżej opiszemy podstawową w kwantowej dynamice (i w całej teorii algebr operatorowych) konstrukcję Gelfanda-Najmarka-Segala. Pozwoli ona konstruować w zadowalający sposób kwantowe ‘miarowe’ układy dynamiczne.

Twierdzenie 4.1. *Niech* A *będzie* C^**-algebrą ze stanem* $\omega \in \mathsf{A}^*$*. Istnieje wtedy przestrzeń Hilberta* H_ω*, zachowująca jedynkę reprezentacja* $\pi_\omega : \mathsf{A} \to B(\mathsf{H}_\omega)$ *i wektor* $\Omega \in \mathsf{H}_\omega$ *takie, że*

$$\overline{\mathrm{Lin}}\, \pi_\omega(\mathsf{A})\Omega = \mathsf{H}_\omega,$$
$$\omega(a) = \langle \Omega, \pi_\omega(a)\Omega\rangle, \quad a \in \mathsf{A}.$$

Ponadto trójka $(\pi_\omega, \mathsf{H}_\omega, \Omega)$ *jest jedyna z dokładnością do unitarnego izomorfizmu: jeśli* $(\pi', \mathsf{H}', \Omega')$ *jest inną taką trójką, to istnieje dokładnie jeden operator unitarny* $U : \mathsf{H}_\Omega \to \mathsf{H}'$ *taki, że* $U(\Omega) = \Omega'$ *i* $\pi'(a) = U^*\pi_\omega(a)U$ *dla wszystkich* $a \in \mathsf{A}$*. Jeśli stan* ω *jest wierny (to znaczy jeśli* $a \in \mathsf{A}$ *i* $\omega(a^*a) = 0$*, to* $a = 0$*), to reprezentacja* $\pi_\omega : \mathsf{A} \to B(\mathsf{H}_\omega)$ *jest wierna.*

Jaki ma to związek z ‘miarowymi’ układami dynamicznymi? Okazuje się, że naturalną klasą algebr operatorowych odpowiadającą klasycznym algebrom typu L^∞ tworzą *algebry von Neumanna*.

Definicja 4.2. Niech H będzie przestrzenią Hilberta. Dla każdych dwóch wektorów $\xi, \eta \in \mathsf{H}$ zdefiniujmy *półnormę* $p_{\xi,\eta}$ na $B(\mathsf{H})$ wzorem

$$p_{\xi,\eta}(T) = |\langle \xi, T\eta\rangle|, \;\; T \in B(\mathsf{H}).$$

Słabą topologią operatorową na $B(\mathsf{H})$ nazywamy (lokalnie wypukłą) topologię wyznaczoną przez rodzinę półnorm $\{p_{\xi,\eta} : \xi, \eta \in B(\mathsf{H})\}$. Innymi słowy, ciąg uogólniony $(T_i)_{i\in I}$ zbiega do T w słabej topologii wtedy i tylko wtedy gdy dla każdych $\xi, \eta \in \mathsf{H}$ uogólniony ciąg liczbowy $(p_{\xi,\eta}(T_i))_{i\in I}$ zbiega do $p_{\xi,\eta}(T)$.

Definicja 4.3. Algebrą von Neumanna nazywamy zawierającą jedynkę *-podalgebrę algebry $B(\mathsf{H})$, która jest domknięta w słabej topologii operatorowej.

Algebry von Neumanna można, w pewnym sensie bardziej naturalnie, definiować przez domkniętość w *ultrasłabej topologii.* Okazuje się ona być najważniejszą, obok normowej, topologią algebr von Neumanna. Po więcej informacji o tej topologii, jak również po dowody poniżej cytowanych twierdzeń odsyłamy do monigrafii [StZ].

Twierdzenie 4.4. *Niech* $\mathcal{A}$ *będzie* **-podalgebrą* $B(\mathsf{H})$ *i oznaczmy* $\mathcal{A}' = \{T \in B(\mathsf{H}) : \forall_{a\in\mathcal{A}}\, Ta = aT\}$*,* $\mathcal{A}'' = \{T \in B(\mathsf{H}) : \forall_{a'\in\mathcal{A}'}\, Ta' = a'T\}$*. Następujące warunki są równoważne:*

(i) $\mathcal{A}$ *jest algebrą von Neumanna;*
(ii) $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$.

Twierdzenie 4.5 (Konstrukcja GNS w przypadku przemiennym)**.** *Niech* X *będzie przestrzenią zwartą,* μ *- miarą probabilistyczną Radona na* X*,* $\mathsf{A} = C(X)$*. Wtedy konstrukcja GNS dla pary* (A, μ) *prowadzi do trójki* $(\pi_\mu, L^2(X, \mu), 1_X)$ *dla której algebra von Neumanna* $\pi_\mu(C(X))''$ *jest izomorficznie izometryczna z algebrą* $L^\infty(X, \mu)$ *(algebrą funkcji istotnie ograniczonych na* X *wyposażoną w normę* ess sup*).*

Tak więc przykładem (przemiennej) algebry von Neumanna jest algebra postaci $L^\infty(X,\mu)$. Jej ultrasłaba topologia jest topologią indukowaną przez dualność $L^\infty(X,\mu) = (L^1(X,\mu))^*$. W istocie tak jest zawsze – twierdzenie Sakai ([Sa]) charakteryzuje abstrakcyjnie algebry von Neumanna jako te C^*-algebry, które są dualnymi przestrzeniami Banacha: $\mathsf{M} = (\mathsf{M}_*)^*$, gdzie M_* jest tak zwanym predualem M.

Odwzorowanie liniowe T między algebrami von Neumanna nazywamy *normalnym*, jeśli jest ciągłe w odpowiednich ultrasłabych topologiach. Jedyność konstrukcji GNS z dokładnością do unitarnej równoważności pozwala łatwo udowodnić następujący wynik.

Stwierdzenie 4.6. *Niech A będzie C^*-algebrą z wiernym stanem $\omega \in \mathsf{A}^*$ i niech $\alpha : \mathsf{A} \to \mathsf{A}$ będzie automorfizmem A takim, że $\omega \circ \alpha = \omega$. Istnieje wtedy dokładnie jeden normalny automorfizm $\tilde{\alpha}$ algebry von Neumanna $\pi_\omega(\mathsf{A})''$ taki, że*

$$\tilde{\alpha}(\pi_\omega(a)) = \pi_\omega(\alpha(a)), \quad a \in \mathsf{A}.$$

4.2. **Klasyczne twierdzenie ergodyczne Birkhoffa.** Klasyczne twierdzenie ergodyczne Birkhoffa o zbieżności punktowej brzmi następująco.

Twierdzenie 4.7. *Niech (X,μ) będzie przestrzenią probabilistyczną, $T : X \to X$ przekształceniem mierzalnym zachowującym miarę μ. Wtedy dla dowolnej funkcji $f \in L^1(X,\mu)$ ciąg $(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k f)_{n=1}^\infty$ jest zbieżny prawie wszędzie (do funkcji z $L^1(X,\mu)$).*

4.3. **Zbieżność niemal jednostajna w algebrze von Neumanna.**

Twierdzenie 4.8 (Twierdzenie Jegorowa)**.** *Ciąg $(f_n)_{n=1}^\infty$ funkcji mierzalnych na przestrzeni probabilistycznej (X,μ) jest zbieżny do funkcji mierzalnej f wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje zbiór $A \subset X$ taki, że $\mu(X \setminus A) < \epsilon$ i $(f_n|_A)_{n=1}^\infty$ jest zbieżny do $f|A$ jednostajnie.*

Definicja 4.9. Niech M będzie algebrą von Neumanna z normalnym stanem wiernym ω. Mówimy, że ciąg $(x_n)_{n=1}^\infty$ elementów M zbiega do $x \in \mathsf{M}$ niemal jednostajnie, jeśli dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje projekcja $p \in M$ taka, że

$$\omega(p^\perp) < \epsilon \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} \|(x_n - x)p\| = 0.$$

4.4. **Twierdzenie ergodyczne Lance'a i uwagi o jego dowodzie.**

Twierdzenie 4.10 ([La])**.** *Niech M będzie algebrą von Neumanna z* normalnym *stanem wiernym $\omega \in \mathsf{M}^*$. Wtedy dla dowolnego $x \in \mathsf{M}$ ciąg $(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k(x))_{n=1}^\infty$ jest zbieżny niemal jednostajnie.*

Szkic. Dowód twierdzenia Lance'a, podobnie jak twierdzenia ergodycznego Birkhoffa, następuje w dwóch etapach. Najpierw korzystając z konstrukcji GNS przenosi się problem do przestrzeni Hilberta i korzysta z twierdzenia ergodycznego von Neumanna, aby pokazać 'słabą' zbieżność. Okazuje się, że jest to dość łatwe w przypadku, w którym ω jest *śladem* (to znaczy $\omega(ab) = \omega(ba)$ dla wszystkich $a, b \in \mathsf{M}$), ogólny przypadek redukuje się do śladowego za pomocą zaawansowanej teorii Tomity-Takesakiego. Drugi etap to dowód tak zwanego lematu maksymalnego, który w tym przypadku przybiera następującą postać: dla dowolnego $\epsilon > 0$ i dodatniego $x \in \mathsf{M}$ takiego, że $\omega(x) = \epsilon$ istnieje dodatni element $y \in \mathsf{M}$ taki, że

$$\|y\| \leqslant 2, \quad \omega(y) \leqslant 4\epsilon^{\frac{1}{2}}$$

i

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k(x) \leqslant y, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dowód lematu maksymalnego jest oparty na dokładnej analizie własności pewnych funkcji afinicznych określonych na zwartych wypukłych podzbiorach lokalnie wypukłych liniowych przestrzeni topologicznych. □

Uwaga 4.11. Klasyczne twierdzenie Birkhoffa jest zwykle formułowane dla funkcji z L^1, a nie tylko funkcji istotnie ograniczonych. W istocie twierdzenie Lance'a posiada również uogólnienia do 'nieprzemiennych' przestrzeni L^p. Nawet ich sformułowanie sięga jednak daleko poza możliwości tego wykładu. Zainteresowanych odsyłamy do pracy [JX] i znajdującej się w niej bibliografii. Odwzorowanie przyporządkowujące elementom M odpowiednią granicę sum Césaro pojawiającą się w twierdzeniu Lance'a posiada naturalną interpretację jako *nieprzemienna warunkowa wartość oczekiwana.*

4.5. **Klasyczna multirekurencja.** Ostatnie lata przyniosły gwałtowny rozwój badań tak zwanej multirekurencji czy twierdzeń 'multiergodycznych'.

Definicja 4.12. Niech M będzie algebrą von Neumanna z normalnym stanem wiernym ρ i niech $\alpha : \mathsf{M} \to \mathsf{M}$ będzie automorfizmem M takim, że $\omega \circ \alpha = \omega$. Mówimy, że $(\mathsf{M}, \omega, \alpha)$ spełnia warunek zbieżności k-tego rzędu w normie, jeśli dla dowolnych $x_1, \ldots, x_{k-1} \in \mathsf{M}$ ciąg $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ zadany wzorem

$$y_n := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\alpha^j(x_1))(\alpha^{2j}(x_2)) \cdots (\alpha^{(k-1)j}(x_{k-1})),$$

spełnia *warunek Cauchy'ego w normie* $\|\cdot\|_2$, to znaczy

$$\lim_{n,m\to\infty} \omega((y_n - y_m)^*(y_n - y_m)) = 0.$$

Dla układów przemiennych ($M = L^\infty(X, \mu)$, $\alpha = \alpha_T$), powyższa zbieżność odpowiada zbieżności w normie L^2 (nawet w sytuacji nieprzemiennej warunek Cauchy'ego oznacza tak naprawdę istnienie granicy ciągu w naturalnie definiowanej przestrzeni Hilberta $L^2(M)$). Korzystając z twierdzenia ergodycznego Lance'a można pokazać, że każda trójka $(\mathsf{M}, \omega, \alpha)$ spełnia warunek zbieżności drugiego rzędu w normie. Klasyczne (już!) twierdzenie Hosta i Kry z [HK] może być przeformułowane następująco.

Twierdzenie 4.13. *Niech* M *będzie przemienną algebrą von Neumanna z normalnym stanem wiernym* ρ *i niech* $\alpha : \mathsf{M} \to \mathsf{M}$ *będzie automorfizmem* M *takim, że* $\omega \circ \alpha = \omega$. *Wtedy dla każdego* $k \in \mathbb{N}$ *trójka* $(\mathsf{M}, \omega, \alpha)$ *spełnia warunek zbieżności* k*-tego rzędu w normie.*

4.6. **Przykład Austina, Eisner i Tao.** W niedawnym preprincie [AET] można znaleźć konstrukcję kontrprzykładu do uogólnień Twierdzenia 4.13 na układy nieprzemienne. Automorfizm z kontrprzykładu jest nawet *ergodyczny*, to znaczy jego punktami stałymi są wyłącznie elementy postaci $\lambda 1$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Twierdzenie 4.14. *Istnieje algebra von Neumanna* M *z wiernym śladem* τ *(czyli stanem spełniającym warunek* $\tau(xy) = \tau(yx)$ *dla* $x, y \in \mathsf{M}$*) i ergodyczny automorfizm* $\alpha : \mathsf{M} \to \mathsf{M}$ *takie, że* $(\mathsf{M}, \tau, \alpha)$ *nie spełnia warunku zbieżności czwartego rzędu w normie.*

Konstrukcja powyższego przykładu opiera się na zawansowanych narzędziach teorii grup definiowanych przez generatory i relacje. Z drugiej strony, że aby układ $(\mathsf{M}, \omega, \alpha)$ spełniał warunek zbieżności dowolnego rzędu w normie wystarczy założyć, że ω jest śladem i cały układ jest *asymptotyczne przemienny* ([AET]).

4.7. **Uwagi końcowe.** W powyższym tekście oczywiście poruszyliśmy tylko wybrane aspekty teorii nieprzemiennych (czy też 'niekoniecznie przemiennych') układów dynamicznych. Teoria ta w pewnym sensie zawiera teorię klasyczną; jak mieliśmy jednak okazję zobaczyć, rozszerzenie nawet podstawowych twierdzeń dotyczących 'zwykłych' układów dynamicznych na przypadek nieprzemienny wymaga zazwyczaj zupełnie innych metod, w naturalny sposób związanych z szeroko pojętą teorią algebr operatorowych, a często również dodatkowych założeń. W podobnym duchu rozwijają się również współcześnie nieprzemienna geometria czy probabilistyka.

Literatura

[AET] T. Austin, T. Eisner i T. Tao, Nonconventional ergodic averages and multiple recurrence for von Neumann dynamical systems, *ukaże się w Pacific J. Math.*, *dostępna pod adresem arxiv.org/abs/0912.5093*

[AF] R. Alicki i M. Fannes, "Quantum dynamical systems," Oxford University Press, Oxford, 2001.

[BG] F. Boca i P. Goldstein, Topological entropy for the canonical endomorphisms of Cuntz-Krieger algebras, *Bull. London Math. Soc.* **32** (2000), no. 3, 345–352.

[Br] N. Brown, Topological entropy in exact C^*-algebras, *Math. Ann.* **314** (1999), no. 2, 347–367.

[Ch] M. Choda, Entropy of Cuntz's canonical endomorphism, *Pacific J. Math.* **190** (1999), no. 2, 235–245.

[Cu_1] J. Cuntz, Simple C^*-algebras generated by isometries. *Comm. Math. Phys.* **57** (1977), no. 2, 173–185.

[Cu_2] J. Cuntz, Automorphisms of certain simple C^*-algebras, in 'Quantum fields—algebras, processes' (Proc. Sympos., Univ. Bielefeld, Bielefeld, 1978), pp. 187–196, Springer, 1980.

[HK] B. Host i B. Kra, Nonconventional ergodic averages and nilmanifolds, *Ann. Math.* **161** (2005), no. 1, 397–488.

[JX] M. Junge i Q. Xu, Noncommutative maximal ergodic theorems, *J. Amer. Math. Soc.* **20** (2007), 385–439.

[Ka] K. Kawamura, Polynomial endomorphisms of the Cuntz algebras arising from permutations. I. General theory., *Lett. Math. Phys.* **71** (2005), no. 2, 149–158.

[La] C.E. Lance, Ergodic theorems for convex sets and operator algebras, *Invent. Math.* **37** (1976), no. 3, 201—214.

[Mu] G.J. Murphy, "C^*-algebras and operator theory," Academic Press, Inc., Boston, 1990.

[NS] S.Neshveyev i E.Størmer, "Dynamical entropy in operator algebras," Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, 50. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[Sa] S. Sakai, "C^*-algebras and W^*-algebras," reprint of the 1971 edition, Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[SZ] A. Skalski i J. Zacharias, Noncommutative topological entropy of endomorphisms of Cuntz algebras, *Lett. Math. Phys.* **86** (2008), no. 2-3, 115–134.

[StZ] S. Stratila i L. Zsido, "Lectures on von Neumann algebras," Abacus Press, Tunbridge Wells, 1979.

[Vo] D. Voiculescu, Dynamical approximation entropies and topological entropy in operator algebras, *Comm. Math. Phys.* **170** (1995), no. 2, 249–281.

[Wa] P. Walters, "An introduction to ergodic theory, Graduate Texts in Mathematics," 79. *Springer-Verlag, New York-Berlin,* 1982.