

Przykładowe zadania z analizy matematycznej II. Część V.

Zadanie 30. Oblicz następujące wartości funkcji Γ i B Eulera:

1. $\Gamma(-1/2)$,
2. $\Gamma(7/2)$,
3. $\Gamma(-7/2)$,
4. $B(1/4, 3/4)$.

Zadanie 31. Wykaż, że:

1. $\int_0^{\infty} \exp(-x^\alpha) dx = \alpha^{-1} \Gamma(\alpha^{-1})$ dla $\alpha > 0$,
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} x \cos^{2q-1} x dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{2\Gamma(p+q)}$ dla $p, q > 0$,
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^\alpha x dx = \frac{1}{2}\pi \left(\cos \frac{1}{2}\pi\alpha\right)^{-1}$ dla $-1 < \alpha < 1$,
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x} dx = (2\pi)^{3/2} \left(\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right)^{-2}$.

Zadanie 32. Dokonując podstawienia $\sin x = \sqrt{1 - \sqrt{u}}$ wyrazić za pomocą funkcji Γ całki eliptyczne:

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 x\right)^{-1/2} dx$,
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 x\right)^{1/2} dx$.

Zadanie 33. Wyrazić przez funkcję Γ całki:

1. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$,
2. $\int_0^1 x^{p-1} (1-x^m)^{q-1} dx$ dla parametrów $p, q, m > 0$.