# Przykładowe zadania z analizy matematycznej II. Część VI.

**Zadanie 34.** Korzystając z zależności rekurencyjnej definiującej liczby Bernoulliego $B_k$ oblicz ich wartości dla $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$.

**Zadanie 35.** Oblicz sumy następujących szeregów:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$,
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8}$.

**Zadanie 36.** Korzystając z tożsamości

$$\pi x \operatorname{ctg} \pi x = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m B_{2m} (2\pi)^{2m}}{(2m)!} x^{2m}$$

znajdź rozwinięcia przy pomocy liczb Bernoulliego następujących funkcji $f(x)$:

1. $f(x) = \operatorname{tg} x$,  wskazówka: $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{ctg} 2x$;
2. $f(x) = \ln \frac{\sin x}{x}$,  wskazówka: $\left( \ln \frac{\sin x}{x} \right)' = \frac{1}{x}(x \operatorname{ctg} x - 1)$.

**Zadanie 37.** Rozwinąć w rzeczywisty szereg Fouriera na przedziale $[-\pi, \pi]$ następujące funkcje:

1. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$;
2. $f(x) = \begin{cases} ax & \text{dla} \quad -\pi < x < 0 \\ bx & \text{dla} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$;
3. $f(x) = e^{ax}$;
4. $f(x) = x \sin x$;
5. $f(x) = \cos ax$ ($a$ niecałkowite).

**Zadanie 38.** Rozwinąć w zespolony szereg Fouriera na przedziale $[-\pi, \pi]$ funkcje $f(x)$ z poprzedniego zadania.

**Zadanie 39.** Rozwinąć w szereg sinusów w przedziale $[0, \pi]$ funkcje:

1. $f(x) = x^2$;
2. $f(x) = e^{ax}$;
3. $f(x) = \cos ax$.

**Zadanie 40.** Rozwinąć w szereg cosinusów w przedziale $[0, \pi]$ funkcje:

1. $f(x) = x$;
2. $f(x) = e^{ax}$;
3. $f(x) = \sin ax$.