Analiza matematyczna II. Zakres na egzamin ustny (całość)

1. Zasadnicze twierdzenie algebry (Twierdzenie 1), rozkład wielomianu zespolonego i wielomianu rzeczywistego na czynniki, przykłady.

2. Zbieżność punktowa i jednostajna ciągów funkcyjnych: definicje, przykłady, porównanie, podstawowe własności.

3. Twierdzenie o zbieżności jednostajnej ciągu funkcji ciągłych (Twierdzenie 2) wraz z dowodem.

4. Charakteryzacja zbieżności jednostajnej ciągu funkcji za pomocą jednostajnego warunku Cauchy'ego (Twierdzenie 3) wraz z dowodem.

5. Zbieżność punktowa i jednostajna szeregów funkcyjnych: definicje, przykłady, własności.

6. Kryterium Weierstrassa zbieżności jednostajnej i bezwzględnej szeregów funkcyjnych (Twierdzenie 4) wraz z dowodem.

7. Co to są wielomiany Bernsteina i jak się je wykorzystuje do dowodu Twierdzenia Weierstrassa o jednostajnym przybliżaniu funkcji ciągłych wielomianami (Twierdzenie 5 i 6).

8. Co mówi twierdzenie o różniczkowaniu ciągów funkcyjnych (Twierdzenie 7) i szeregów funkcyjnych wraz z przykładami zastosowania.

9. Twierdzenie Arzeli-Ascoli (Twierdzenie 8) wraz z wytłumaczeniem wszystkich pojęć w nim występujących.

10. Definicja i przykłady szeregów potęgowych, wzór Cauchy'ego-Hadamarda (Twierdzenie 9), granica dolna i górna ciągu, promień, przedział i koło zbieżności szeregu potęgowego.

11. Twierdzenie o różniczkowaniu szeregów potęgowych (Twierdzenie 10) wraz z dowodem i wnioski z niego wypływające.

12. Twierdzenie Abela o ciągłości na krańcu przedziału zbieżności (Twierdzenie 11) wraz z przykładami zastosowania.

13. Funkcja pierwotna: definicja, przykłady, zależności pomiędzy dwoma funkcjami pierwotnymi tej samej funkcji na tym samym przedziale (Stwierdzenie 6) wraz z dowodem.

14. Twierdzenie mówiące, że każda funkcja ciągła ma funkcję pierwotną (Twierdzenie 12) wraz z ideą dowodu.

15. Całka nieoznaczona: definicja, przykłady, podstawowe całki nieoznaczone.

16. Własności całek nieoznaczonych: liniowość, całkowanie przez części i przez podstawienie (Stwierdzenia 7–9 wraz z dowodami).

17. Rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste (Twierdzenie 13) i całkowanie funkcji wymiernych.

18. Funkcje hiperboliczne i funkcje area: definicje, podstawowe własności, zastosowanie do liczenia całek z funkcji niewymiernych.

19. Całka oznaczona (całka Newtona): definicja (wraz z uzasadnieniem jej poprawności), przykłady.

20. Podstawowe własności całek oznaczonych: liniowość, wzór na całkowanie przez części i przez podstawienie, podział przedziału całkowania (Stwierdzenia 10–13).

21. Monotoniczność całki (Stwierdzenie 14) wraz z dowodem.

22. Twierdzenie o przejściu granicznym pod znakiem całki (Twierdzenie 14) wraz z dowodem.

23. Twierdzenie o przybliżaniu całki sumami całkowymi (Twierdzenie 15) wraz z przykładem zastosowania.

24. Wzór Wallisa (Twierdzenie 16) i Stirlinga (Twierdzenie 17) wraz z przykładami stosowania.

25. Twierdzenia o wartości średniej dla całek (Twierdzenie 19 i 20) wraz z przykładami stosowania.

26. Konstrukcja całki Riemanna (definicje podziału przedziału, sum górnych i dolnych Riemanna, całek górnych i dolnych Riemanna, funkcji całkowalnych w sensie Riemanna i całki Riemanna).

27. Charakteryzacja funkcji całkowalnych w sensie Riemanna (Twierdzenie 21) i klasy funkcji, które są całkowalne w sensie Riemanna (Twierdzenia 22–24).

28. Długość krzywej: definicje łamanej wpisanej w krzywą, długości łamanej, długości krzywej i wzór na długość krzywej (Twierdzenie 25), przykłady.

29. Bryły obrotowe: wzory na objętość i pole powierzchni bocznej bryły obrotowej wraz z ich konstrukcją, przykłady.

30. Definicja całki niewłaściwej na przedziale nieskończonym, przykłady, warunek Cauchy'ego dla całek niewłaściwych (Twierdzenie 26).

31. Definicja zbieżności bezwzględnej i warunkowej dla całek niewłaściwych, kryteria zbieżności dla całek niewłaściwych (Twierdzenia 29 i 30), przykłady.

32. Kryterium całkowe zbieżności szeregów (Twierdzenie 28) wraz ze szkicem dowodu, przykłady zastosowania.

33. Definicja całki niewłaściwej na przedziale skończonym, przykłady, warunek Cauchy'ego (Twierdzenie 31).

34. Definicja funkcji gamma Eulera, wykazanie zbieżności całki definiującej funkcję gamma, podstawowe własności funkcji gamma (Stwierdzenie 21) wraz z dowodem.

35. Nierówność Younga (Stwierdzenie 23) i nierówność Höldera (Twierdzenie 33) wraz z dowodem.

36. Definicja logarytmicznej wypukłości, wykazanie, że funkcja gamma jest logarytmicznie wypukła, twierdzenie Bohra (Twierdzenie 34) o funkcji gamma.

37. Funkcja beta Eulera: definicja i wykazanie jej poprawności, podstawowe własności (Stwierdzenie 26), związek z funkcją gamma (Twierdzenie 35 punkt 3)

38. Rozwinięcie cotangensa w szereg ułamków prostych (Twierdzenie 40) wraz z dowodem. 39. Liczby Bernoulliego (definicja, wzór rekurencyjny na ich wyliczanie), funkcja dzeta Riemanna, wyrażenie wartości funkcji dzeta Riemanna w punktach parzystych za pomocą liczb Bernoulliego.

40. Jak wyglądają rzeczywisty i zespolony szereg Fouriera funkcji f. Jak znaleźć współczynniki Fouriera tych szeregów.

41. Co mówią: lemat Riemanna-Lebesgue'a (Twierdzenie 42) i kryterium Diniego (Twierdzenie 43). Dla jakich funkcji można stosować kryterium Diniego.