Egzamin z analizy matematycznej III. Zadania. Zestaw A. 12 II 2025.

Imię i Nazwisko: .... Numer indeksu: ....

Zadanie 1. Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 \sin y \cos y}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Zadanie 2. Pokazać, że odwzorowanie

$$\phi(t) = (t^3 + 1, 1 + \sin t, 3\cos 2t - 2)$$

jest dyfeomorfizmem $\mathbb{R}$ na obraz $\phi(\mathbb{R})$. Znaleźć przestrzeń styczną i prostą styczną do $\phi(\mathbb{R})$ w punkcie $(1,1,1)$.

Zadanie 3. Niech $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją klasy C^1. Znaleźć $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ jeśli zachodzi równanie

$$F(x + 2y + 4z, 2x - z, yz) = 0.$$

Zadanie 4. Znajdź ekstrema funkcji $f(x,y) = x^2 - 4xy + 5y^2$ na zbiorze

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| + |y| \leqslant 1\}.$$

Zadanie 5. Napisać wzór Taylora do pochodnych rzędu 2 względem punktu $(1,0)$ dla funkcji $f(x,y) = \ln(x^2 - 3xy)$.

Zadanie 6. Obliczyć miarę zbioru A ograniczonego krzywymi $xy = 2$ i $|x - y| = 4$.

Zadanie 7. Korzystając z twierdzenia Greena obliczyć całkę krzywoliniową zorientowaną

$$\oint_\gamma (x - x^2)y + 2x^2 \sin(x^2)\, dx + x(1 + y^2) + y\ln(y^4 + 1)e^y\, dy,$$

gdzie γ — okrąg $x^2 + y^2 = 4$ zorientowany dodatnio.

Zadanie 8. Oblicz całkę powierzchniową niezorientowaną

$$\iint_\Sigma (1 + x^2 + y^2)\, dS,$$

gdzie Σ jest sferą o równaniu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Egzamin z analizy matematycznej III. Zadania. Zestaw B. 12 II 2025.

Imię i Nazwisko: .... Numer indeksu: ....

Zadanie 1. Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2(x+y)}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Zadanie 2. Pokazać, że odwzorowanie

$$\phi(t) = (t^5, 1 + \sin(\pi t), -\cos(\pi t))$$

jest dyfeomorfizmem $\mathbb{R}$ na obraz $\phi(\mathbb{R})$. Znaleźć przestrzeń styczną i prostą styczną do $\phi(\mathbb{R})$ w punkcie $(1,1,1)$.

Zadanie 3. Niech $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją klasy C^1. Znaleźć $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ jeśli zachodzi równanie

$$F(xyz, 2x + y + z, xz) = 0.$$

Zadanie 4. Znajdź ekstrema funkcji $f(x,y) = 2x^2 - 4xy + 4y^2$ na zbiorze

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| + |y| \leqslant 1\}.$$

Zadanie 5. Napisać wzór Taylora do pochodnych rzędu 2 względem punktu $(0,1)$ dla funkcji $f(x,y) = \ln(xy + 2y^2)$.

Zadanie 6. Obliczyć miarę zbioru A ograniczonego krzywymi $xy = 4$ i $|x - y| = 2$.

Zadanie 7. Korzystając z twierdzenia Greena obliczyć całkę krzywoliniową zorientowaną

$$\oint_\gamma (1 - x - x^2)y + 2x^2 \sin(x^2)\, dx + x(1 + y^2) + y \ln(y^4 + 1)e^y\, dy,$$

gdzie γ — okrąg $x^2 + y^2 = 1$ zorientowany dodatnio.

Zadanie 8. Oblicz całkę powierzchniową niezorientowaną

$$\iint_\Sigma (x^2 + y^2 - 2)\, dS,$$

gdzie Σ jest sferą o równaniu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.