Egzamin poprawkowy z analizy matematycznej III. Zadania. Zestaw A. 7 III 2025.

Imię i Nazwisko: .... Numer indeksu: ....

Zadanie 1. Zbadać w zależności od parametru $a \geqslant 0$ ciągłość i różniczkowalność funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^a \sin y}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Zadanie 2. Pokazać, że odwzorowanie $\phi(t) = (t, \sin t, \cos t)$ jest dyfeomorfizmem $\mathbb{R}$ na obraz $\phi(\mathbb{R})$. Znaleźć przestrzeń styczną i prostą styczną do $\phi(\mathbb{R})$ w punkcie $(\pi, 0, -1)$.

Zadanie 3. Korzystając z twierdzenia o mnożnikach Lagrange'a znaleźć ekstrema warunkowe funkcji $f(x,y) = 2x - y$ na zbiorze $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 3x^2 + y^2 = 4\}$.

Zadanie 4. Znaleźć $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ jeśli $F(x-y, x+2y+3z, z-x) = 0$, gdzie F jest klasy C^1.

Zadanie 5. Znajdź ekstrema funkcji $f(x,y) = -x^2 + 2xy - 5y^2$ na zbiorze $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leqslant 1\}$.

Zadanie 6. Obliczyć całkę podwójną $\iint\limits_D (3y^2 + xy)\, dx\, dy$, gdzie zbiór D jest trójkątem ograniczonym prostą $2x + y = 6$ i osiami współrzędnych.

Zadanie 7. Obliczyć całkę krzywoliniową niezorientowaną $\int\limits_\gamma (xy + x^2)\, dl$, gdzie γ — odcinek o początku $(1,0)$ i końcu $(0,2)$.

Zadanie 8. Korzystając z twierdzenia Greena obliczyć całkę krzywoliniową zorientowaną

$$\oint\limits_\gamma (y^2 - x^2 y + y)\, dx + x(1 + y^2)\, dy,$$

gdzie γ — okrąg $x^2 + y^2 = 4$ zorientowany dodatnio.

Egzamin poprawkowy z analizy matematycznej III. Zadania. Zestaw B. 7 III 2025.

Imię i Nazwisko: .... Numer indeksu: ....

Zadanie 1. Zbadać w zależności od parametru $\alpha \geqslant 0$ ciągłość i różniczkowalność funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^\alpha \sin x}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Zadanie 2. Pokazać, że odwzorowanie $\phi(t) = (t^3, \cos t, \sin t)$ jest dyfeomorfizmem $\mathbb{R}$ na obraz $\phi(\mathbb{R})$. Znaleźć przestrzeń styczną i prostą styczną do $\phi(\mathbb{R})$ w punkcie $(0,1,0)$.

Zadanie 3. Korzystając z twierdzenia o mnożnikach Lagrange'a znaleźć ekstrema warunkowe funkcji $f(x,y) = x - 3y$ na zbiorze $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 4x^2 + 9y^2 = 25\}$.

Zadanie 4. Znaleźć $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ jeśli $F(x - 2y - 3z, 2x + z, x - 4y) = 0$.

Zadanie 5. Znajdź ekstrema funkcji $f(x,y) = 5x^2 - 4xy + y^2$ na zbiorze $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; |x| + |y| \leqslant 1\}$.

Zadanie 6. Obliczyć całkę podwójną $\iint\limits_A (x^2 + 2xy + 3)\, dx\, dy$, gdzie zbiór A jest trójkątem ograniczonym prostą $2x + y = 4$ i osiami współrzędnych.

Zadanie 7. Obliczyć całkę krzywoliniową zorientowaną z pola wektorowego $F(x,y) = (y + x, -2x - y)$ po odcinku o początku $(1,1)$ i końcu $(3,2)$.

Zadanie 8. Sprawdzić, czy podana całka krzywoliniowa zorientowana

$$\int\limits_\gamma (2y^3 \cos x + 3e^{4x})\, dx + (6y^2 \sin x + \sin y)\, dy,$$

gdzie γ — krzywa o początku $A = (1,3)$ i końcu $B = (2,5)$ nie zależy od kształtu krzywej całkowania i jeśli tak to ją obliczyć korzystając z potencjału.