Przykładowe zadania z analizy matematycznej III. Część I.

Zadanie 1. Dla danego zbioru A znaleźć: zbiór punktów skupienia, zbiór punktów izolowanych, wnętrze $\operatorname{Int} A$, domknięcie $\overline{A}$ i brzeg ∂A. Czy zbiór A jest otwarty/domknięty? Narysować zbiór A w układzie współrzędnych:

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 < x < 1, \ -1 < y < 1\} \setminus \{(0, 0)\}$,
2. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < xy < 2\}$,
3. $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x < 1, \ 0 < y < 1\}$,
4. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\} \cup [-2, 2] \times \{0\}$,
5. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > |x|\}$,
6. $A = \{((-1)^n, (\frac{1}{2})^n) : n \in \mathbb{N}\}$.

Zadanie 2. Zbadać zbieżność ciągów i dla ciągów zbieżnych wskazać ich granice:

1. $(x_n, y_n) = (\log_{2n+3} 3, \dfrac{-3}{n})$,
2. $(x_n, y_n, z_n) = \left(\dfrac{1}{3^n}, \left(\dfrac{3}{4}\right)^{3n}, \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-n}\right)$.

Zadanie 3. Znaleźć i narysować w układzie współrzędnych zbiory na których dane funkcje są określone:

1. $f(x, y) = \frac{x \ln y}{x^2+y^2-16}$,
2. $g(x, y) = \ln \frac{x^2+y^2-9}{16-x^2-y^2}$,
3. $h(x, y) = \arcsin(x^2 + y^2 - 3)$.

Zadanie 4. Znaleźć poziomice wykresów podanych funkcji i na tej podstawie naszkicować te wykresy:

1. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$,
2. $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$,
3. $h(x, y) = \cos x$,
4. $k(x, y) = e^{x-y}$.

Zadanie 5. Zbadać istnienie granic:

1. $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to\infty}(\frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1+xy}))$ $\quad \lim\limits_{y\to\infty}(\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1+xy}))$ $\quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to\infty}}(\frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1+xy})$
2. $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0}(y + x \sin(\frac{1}{y})))$ $\quad \lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0}(y + x \sin(\frac{1}{y})))$ $\quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(y + x \sin(\frac{1}{y}))$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\lim\limits_{y\to\infty} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2})$ $\quad \lim\limits_{y\to\infty}(\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2})$ $\quad \lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2})$ $\quad \lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2})$ $\quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} \frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2})$ $\quad \lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2})$ $\quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2}$

6. $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2+y^2}}{|x|+|y|})$ $\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2+y^2}}{|x|+|y|})$ $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt[3]{x^2+y^2}}{|x|+|y|}$

Zadanie 6. Znajdź granice funkcji:

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}$,
2. $\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$,
3. $\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}(\frac{xy}{x^2+y^2})^{x^2}$,
4. $\lim_{(x,y)\to(+\infty,a)}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}}$,
5. $\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Zadanie 7. Zbadać ciągłość funkcji:

1. $$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases},$$
2. $$g(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases},$$
3. $$h(x,y)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2-y^2} & \text{dla} \quad x^2+y^2\leqslant 1\\ 0 & \text{dla} \quad x^2+y^2>1\end{cases}.$$

Zadanie 8. Niech
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^5}{(x^2-y)^2+x^8} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$
Wyliczyć pochodne kierunkowe f w punkcie $(0,0)$ w kierunku dowolnego wektora $v\in\mathbb{R}^2$ i pokazać, że f nie jest ciągła w $(0,0)$.

Zadanie 9. Niech
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$
Znaleźć pochodne cząstkowe f w dowolnym punkcie $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Zadanie 10. Znaleźć pochodne cząstkowe funkcji:

1. $f(x,y,z)=x^{yz}$ dla $x>0$.

Zadanie 11. Znaleźć pochodne kierunkowe funkcji:

1. $f(x,y)=e^{x^2y}\sin(3xy)$ w kierunku wektora $v=(-1,1)$.

Zadanie 12. Zbadać w jakich punktach jest różniczkowalna funkcja f oraz znaleźć Df, gdy:

1. $f(x,y)=|x-y|$ dla $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Zadanie 13. Zbadać różniczkowalność funkcji:

1. $$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases},$$

2.
$$g(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{dla}\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla}\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

Zadanie 14. Zbadać, czy funkcja $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ jest klasy C^1, gdzie:

1. $f(x,y)=x\cos\sqrt{x^2+y^2}$.

Zadanie 15. Policzyć $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$ dla:

1. $u(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$,
2. $u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$,
3. $u(x,y)=f(x,\frac{x}{y})$, gdzie f — funkcja różniczkowalna.

Zadanie 16. Niech f — funkcja różniczkowalna. Sprawdzić, czy:

1. $u(x,y)=yf(x^2-y^2)$ spełnia $y^2\frac{\partial u}{\partial x}+xy\frac{\partial u}{\partial y}=xu$,
2. $u(x,y)=f(x^2+y^2)$ spełnia $y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0$,
3. $u(x,y)=\frac{y^2}{3x}+f(xy)$ spełnia $x^2\frac{\partial u}{\partial x}-xy\frac{\partial u}{\partial y}+y^2=0$.