Przykładowe zadania z analizy matematycznej III. Część II.

Zadanie 17. Niech $\phi(u,v) = \Big(u + v\cos u, e^{2u}(v+1)\Big)$. Wykazać, ze istnieje otoczenie U punktu $(0,0)$, takie, że $\phi_{|U}$ jest dyfeomorfizmem na obraz. Obliczyć pochodną $(\phi_{|U})^{-1}$ w punkcie $(0,1)$.

Zadanie 18. Niech $\varphi(x,y) = (\sin(x+y)e^y, \operatorname{arctg}(x+y^2))$. Znajdź pochodne cząstkowe, macierz Jacobiego i jakobian odwzorowania φ. Czy odwzorowanie φ jest odwracalne w otoczeniu punktu $(x,y) = (0,0)$? Jeśli tak, to oblicz macierz różniczki odwzorowania odwrotnego $D\varphi^{-1}(\varphi(0,0))$.

Zadanie 19. Niech $\phi(u,v) = (e^{u+v} + e^{u-v}, e^{u+v} - e^{u-v})$ dla $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Znależć $\phi(\mathbb{R}^2)$ oraz zbadać, czy ϕ jest dyfeomorfizmem.

Zadanie 20. Znaleźć dyfeomorfizm pewnego przedziału otwartego $P \subset \mathbb{R}^2$ na obszar $G \subset \mathbb{R}^2$ i narysować ten obszar jeśli:

1. $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 < x^2 + y^2 < 4,\ 0 < x < y < 2x\}$,
2. $G = \{(x,y) :\ y^2 < x < 2y^2,\ 2x^2 < y < 3x^2\}$,
3. $G = \{(x,y) :\ O < x,\ 0 < y < x^2\}$.

Zadanie 21. Przypomnijmy, że $\phi(t) = (\cos t, \sin t, t)$ jest dyfeomorfizmem $\mathbb{R}$ na obraz $\phi(\mathbb{R})$ (zwany linią śrubową). Znaleźć przestrzeń styczną i prostą styczną do linii śrubowej w punkcie $(1,0,0)$.

Zadanie 22. Niech $\phi\colon (0,2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3$, $\phi(\alpha,\beta) = (\cos\alpha\cos\beta, \sin\alpha\cos\beta, \sin\beta)$. Wykazać, że ϕ jest dyfeomorfizmem $(0,2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ na obraz. Znaleźć ten obraz. Znaleźć przestrzeń styczną i płaszczyznę styczną do tego obrazu w punkcie $(-1,0,0)$.

Zadanie 23. Niech $\mathbb{T}_0 = \{\phi(x_1,x_2) : (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2\}$, gdzie $\phi(x_1,x_2) = \Big(\cos x_1, \sin x_1, \cos x_2, \sin x_2\Big)$. Wykazać, że $\mathbb{T}_0$ jest dwuwymiarową rozmaitością. Znaleźć przestrzeń styczną i płaszczyznę styczną do $\mathbb{T}_0$ w punkcie $(1,0,1,0)$.

Zadanie 24. Wykazać, że układ równań

$$\begin{cases} xu - yv = 0 \\ yu + xv = 2 \end{cases}$$

określa w otoczeniu punktu $x_0 = y_0 = u_0 = v_0 = 1$ funkcje $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$. Policzyć różniczki $Du(x_0,y_0)$, $Dv(x_0,y_0)$.

Zadanie 25 Znaleźć:

1. $\frac{dy}{dx}$ jeśli $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$;
2. $\frac{dy}{dx}$ dla $(x,y) = (0,0)$, jeśli $(x^2+y^2)^2 = 3x^2y - y^3$;
3. dz jeśli $\frac{x}{z} = \ln\frac{z}{y} + 1$;
4. du jeśli $u^3 - 3(x+y)u^2 + z^3 = 0$;
5. $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ jeśli $f(x-y, y-z, z-x) = 0$.

Zadanie 26. Obliczyć $y'(x)$ i $y''(x)$, gdzie $y(x)$ jest określone równaniem:

1. $y - \sin y + x^2 = 0$;
2. $y^2 - \operatorname{arc\,tg} y - e^x = 0$.

Zadanie 27. Napisać równania stycznych do krzywych określonych podanymi równaniami we wskazanych punktach A tych krzywych:

1. $x + x^3 = y^3 + y^5$, $A = (1, 1)$;
2. $2 + x^3 + y^3 = e^x + e^y$, $A = (0, 0)$.

Zadanie 28. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji uwikłanych $y = y(x)$ określonych równaniami:

1. $x^3 + y^3 - 8xy = 0$;
2. $x^2 + y^2 - xy - 2x + 4y = 0$;
3. $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$.

Zadanie 29 Zbadać, czy zbiór S jest rozmaitością. Jeśli tak, to wyznaczyć jej wymiar oraz znaleźć $T(p, S)$ i $N(p, S)$, gdzie $p \in S$:

1. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ x^2 - x + y^2 = 0\}$,
2. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + z^2 = 1, \ y^2 + z^2 = 1\}$,
3. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ e^{2x+y+z} + e^{3x-y} + \ln(1 + x + y) = 2\}$,
4. $S = \{(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4 : \ e^{x+y+u} + e^{x+y+v} + u = 2, \ e^{x+u} + e^{x+y-u} + u - v = 2\}$.