

Przykładowe zadania z analizy matematycznej III. Część III.

Zadanie 30. Znajdź ekstrema funkcji f na zbiorze F , gdzie:

1. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$;
2. $f(x, y) = x^2 + xy + 2y$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$;
3. $f(x, y, z) = (x + y + z)e^{-x-2y-3z}$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

Zadanie 31. Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji f na zbiorze S ($a > b > 0$), gdzie:

1. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, $f(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$;
2. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1\}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$;
3. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 = 25\}$, $f(x, y) = x^2 + 12xy + 2y^2$.

Zadanie 32. Obliczyć drugie pochodne cząstkowe funkcji:

1. $f(x, y) = \arctg \frac{y}{x}$,
2. $f(x, y, z) = x^{y^z}$.

Zadanie 33. Niech f – funkcja dwukrotnie różniczkowalna. Znaleźć pochodne cząstkowe drugiego rzędu:

1. $u(x, y) = f(x + y, xy)$,
2. $u(x, y, z) = f(x, xy, xyz)$.

Zadanie 34. Znaleźć Δu , jeśli:

1. $u(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$,
2. $u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

Zadanie 35. Pokazać, że jeśli funkcja dwukrotnie różniczkowalna $f = f(x, y)$ spełnia równanie Laplace'a (tzn. $\Delta f = 0$) to również $u(x, y) = f(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2})$ spełnia to równanie.

Zadanie 36. Niech ϕ, ψ — funkcje dwukrotnie różniczkowalne. Wykazać, że:

1. $u(t, x) = \phi(x - at) + \psi(x + at)$ spełnia równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

2. $u(x, y) = x\phi(x + y) + y\psi(x + y)$ spełnia równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Zadanie 37. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji f na \mathbb{R}^2 :

1. $f(x, y) = x^2 y(4 - x + y)$,
2. $f(x, y) = 6xy - x^3 - y^3$,
3. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4a^2 xy + 2a^2$ (a – parametr),
4. $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

Zadanie 38. Znaleźć pochodne cząstkowe funkcji f :

1. $\frac{\partial^{p+q}f}{\partial x^p \partial y^q}$ jeśli $f(x, y) = (x - a)^p(y - b)^q$,

2. $\frac{\partial^{m+n}f}{\partial x^m \partial y^n}$ jeśli $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{x+y}$.

Zadanie 39. Znaleźć różniczkę $d^3f(x, y)hh'h''$ dla:

1. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy(x - y)$.

Zadanie 40. Napisać wzór Taylora względem punktu $(1, 1, 1)$ dla funkcji

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

Zadanie 41. Napisać wzór Taylora do pochodnych rzędu 2 względem punktu $(0, 0)$ dla funkcji

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Zadanie 42. Rozwinąć w szereg Taylora względem punktu $(1, 1)$ funkcję $f(x, y) = \frac{x}{y}$.

Zadanie 43. Rozwinąć w szereg MacLaurina funkcję f :

1. $f(x, y) = \ln(1 + 2x + 3y)$,

2. $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$.