

Przykładowe zadania z analizy matematycznej III. Część IV.

Zadanie 44. Przedstawić $\iint_A f(x, y) dx dy$ w postaci całek iterowanych, jeśli zbiór A ograniczony jest krzywymi:

1. $x^2 + y = 2, y^3 = x^2$;
2. $x^2 + y^2 = 4, y = 2x - x^2, x = 0 (x, y \geq 0)$;
3. $x^2 - y^2 = 1, x^2 + y^2 = 3 (x < 0)$.

Zadanie 45. Obliczyć miarę zbioru A ograniczonego:

1. krzywymi $y^2 = 4x, x + y = 3, y = 0 (y \geq 0)$;
2. krzywymi $x + y = 4, x + y = 8, x - 3y = 0, x - 3y = 5$;
3. krzywymi $xy = 4$ i $|x + y| = 5$;
4. powierzchniami $x = -1, x = 2, z = 4 - y^2, z = 2 + y^2$;
5. powierzchniami $z = x^3 + y^3, x = 0, y = 0, z = 0, x = 1, y = 1$.

Zadanie 46. Zmienić porządek całkowania w całkach iterowanych:

1. $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy$;
2. $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy$;
3. $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy$;
4. $\int_{-1}^1 \left(\int_0^{|x|} f(x, y) dy \right) dx$;
5. $\int_0^4 \left(\int_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x, y) dy \right) dx$;
6. $\int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} \left(\int_0^{3-3x-\frac{3}{2}y} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$.

Zadanie 47 Obliczyć całki iterowane:

1. $\int_1^3 dx \int_1^{\sqrt{x}} \frac{y}{x} dy$;
2. $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \sin^2 \varphi dr$.

Zadanie 48. Obliczyć podane całki podwójne i potrójne:

1. $\iint_P ye^{xy} dx dy$, gdzie $P = [-1, 1] \times [0, 1]$;
2. $\iint_P x \sin^2 xy dx dy$, gdzie $P = [0, 2] \times [0, \pi]$;
3. $\iint_T (4 - x - y) dx dy$, gdzie T jest trójkątem o wierzchołkach $(0, 0), (2, 2), (1, 3)$;

4. $\iint_D \frac{x}{y} dx dy$, gdzie $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq x^2\}$;
5. $\iint_D \frac{\sqrt{xy^2+4x^4}}{xy} dx dy$, gdzie $D = [1, 9] \times [2, 3]$;
6. $\iint_D [x + y] dx dy$, gdzie $[a]$ oznacza największą liczbę całkowitą n taką, że $n \leq a$, $D = [0, 2] \times [0, 2]$;
7. $\iint_D \frac{dx dy}{(x+y+1)^3}$, gdzie $D = [0, 2] \times [0, 1]$;
8. $\iiint_P \sin(x + y + z) dx dy dz$, gdzie $P = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \pi]$.

Zadanie 49. Obliczyć podane całki podwójne i potrójne:

1. $\iint_T (5x^2 - 2xy) dx dy$, gdzie T jest trójkątem ograniczonym prostą $x + 2y = 2$ i osiami współrzędnych;
2. $\iint_D \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) dx dy$, gdzie $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$;
3. $\iiint_P xz \sin(xy) dx dy dz$, gdzie $P = [\frac{1}{6}, \frac{1}{2}] \times [0, \pi] \times [0, 1]$;
4. $\iiint_P e^{x+y+z} dx dy dz$, gdzie $P : x \leq 0, -x \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq -x$;
5. $\iiint_P x^2 + y^2 dx dy dz$, gdzie $P : x^2 + y^2 \leq 4, 1 - x \leq z \leq 2 - x$.

Zadanie 50. Dokonując odpowiedniej zamiany zmiennych obliczyć podane całki:

1. $\iint_D (2x + 3y) dx dy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi: $x + y = 2, x + y = 4, y + 2x = -4, y + 2x = 3$.
2. $\iint_D xy^2 dx dy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi: $x^2 y = 1, x^2 y = 3, y = x, y = 2x$.

Zadanie 51. Dokonując zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe r i α obliczyć całki:

1. $\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, a — ustalony parametr;
2. $\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywą $x^2 + y^2 = 2$;
3. $\iint_D y^2 e^{x^2+y^2} dx dy$, gdzie D jest obszarem spełniającym warunki: $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$;
4. $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, gdzie D jest obszarem spełniającym warunki: $y \leq x^2 + y^2 \leq x, y \geq 0$.

Zadanie 52. Dokonując zamiany zmiennych na współrzędne walcowe φ, r i h obliczyć podane całki po obszarach ograniczonych wskazanymi powierzchniami:

1. $\iiint_U x^2 dx dy dz$, gdzie $U: z = 9 - x^2 - y^2, z = 0$;
2. $\iiint_U (x^2 + y^2) dx dy dz$, gdzie $U: z = 2\sqrt{x^2 + y^2}, z = 8$;
3. $\iiint_U z^2 dx dy dz$, gdzie $U: z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Zadanie 53. Dokonując zamiany zmiennych na współrzędne sferyczne α, β i r obliczyć podane całki po obszarach ograniczonych wskazanymi powierzchniami:

1. $\iiint_U z^2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx dy dz$, gdzie $U: z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, z = 0$;
2. $\iiint_U \frac{dx dy dz}{x^2 + y^2 + z^2}$, gdzie $U: z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, z = \frac{1}{2}$;
3. $\iiint_U (x^2 + y^2) \, dx dy dz$, gdzie $U: z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{x^2 + y^2}$.