Przykładowe zadania z analizy matematycznej III. Część V.

Zadanie 54. Sprawdzić, że wartość całki krzywoliniowej niezorientowanej nie zależy od parametryzacji na przykładzie całki $\int\limits_\gamma x^2y\,ds$, jeśli γ jest krzywą opisaną równaniami:

1. $x(t) = 2\cos(-t)$, $y(t) = 2\sin(-t)$, gdzie $t \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$;
2. $x(t) = t$, $y(t) = \sqrt{4-t^2}$, gdzie $t \in [0,2]$.

Zadanie 55. Obliczyć podane całki krzywoliniowe niezorientowane po wskazanych krzywych:

1. $\int\limits_\gamma xy\,ds$, gdzie γ — brzeg kwadratu $|x|+|y| \leqslant 1$;
2. $\int\limits_\gamma \frac{xy}{z}\,ds$, gdzie γ — odcinek łączący punkty $(1,1,1)$ i $(2,3,4)$.

Zadanie 56. Obliczyć podane całki krzywoliniowe zorientowane z pola wektorowego F po krzywej γ dla

1. $F(x,y) = (y, -x^2)$, γ — krzywa $x(t) = t$, $y(t) = \frac{1}{2}t^2$, gdzie $t \in [0,2]$;
2. $F(x,y) = (x+y, x-y)$, γ — krzywa $x(t) = 2\cos t$, $y(t) = 4\sin t$, gdzie $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Zadanie 57. Sprawdzić, czy podane całki krzywoliniowe zorientowane nie zależą od kształtu krzywej całkowania i następnie obliczyć je:

1. $\int\limits_\gamma (2xy^3 + \sin x)\,dx + (3x^2y^2 + e^y)\,dy$, γ — krzywa o początku $A = (-2,2)$ i końcu $B = (-1,0)$;
2. $\int\limits_\gamma (y\sin x + x^2)\,dx - (\cos x + y^3)\,dy$, γ — krzywa o początku $A = (0,1)$ i końcu $B = (\pi, -1)$.

Zadanie 58. Korzystając z twierdzenia Greena obliczyć podane całki krzywoliniowe zorientowane po krzywych dodatnio zorientowanych względem swego wnętrza:

1. $\oint\limits_\gamma (1-x^2)y\,dx + x(1+y^2)\,dy$, γ — okrąg $x^2+y^2 = 1$;
2. $\oint\limits_\gamma (x^2+y)\,dx + (x+y^2)\,dy$, γ — brzeg trójkąta o wierzchołkach $A = (1,1)$, $B = (3,2)$, $C = (2,5)$ zorientowanym dodatnio.

Zadanie 59. Obliczyć $V(S)$, gdzie rozmaitością S jest zbiór:

1. $S = \{(\cos t, \sin t, t)\colon 0 < t < 4\pi\}$ („linia śrubowa”).
2. $S = \{(x_1, ..., x_k, y)\colon y = x_1^2 + ... + x_k^2 < 1\}$ („k-wymiarowa parabolida”).

Zadanie 60. Obliczyć pole:

1. części sfery $x^2+y^2+z^2 = 4$ leżącej w półprzestrzeni $z \geqslant 1$;
2. części powierzchni stożka $z = \sqrt{x^2+y^2}$ ograniczonej płaszczyznami $y = x$, $y = \sqrt{3}x$, $z = 1$, $z = 3$ $(x \geqslant 0)$.

Zadanie 61. Obliczyć całki powierzchniowe z funkcji $f(x,y,x)$ po zbiorze S jeśli:

1. $f(x,y,z) = xz$, $S = \{(x,y,z)\colon x = v\cos u,\ y = v\sin u,\ z = v,\ \text{dla } 0 \leqslant u \leqslant \pi,\ 3 \leqslant v \leqslant 4\}$;
2. $f(x,y,z) = y$, $S = \{(x,y,z)\colon x = -u,\ y = -v,\ z = 1+u+v,\ \text{dla } 0 \leqslant u \leqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant 1\}$;
3. $f(x,y,z) = z^2$, S — stożek $z = \sqrt{x^2+y^2}$ odcięty płaszczyznami $z = 1$ i $z = 2$.

4. $f(x, y, z) = xyz$, S — płaszczyzna $x + y + z = 1$ leżąca w pierwszym oktancie układu współrzędnych;
5. $f(x, y, z) = x^2 + z^2$, S — część sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ odcięta płaszczyznami $z = 0$ i $z = 1$;
6. $f(x, y, z) = z^2$, S — powierzchnia walca $x^2 + z^2 = 1$ odcięta płaszczyznami $y = 0$ i $y = 1$, leżąca nad płaszczyzną $z = 0$.
7. $f(x, y, z) = xyz$, S — powierzchnia $y^2 = x$ odcięta płaszczyznami $z = 0$, $z = 4$ i $y = 1$, $y = 2$.