Analiza matematyczna III. Zakres na egzamin ustny

1. Przestrzeń wektorowa $\mathbb{R}^n$ i n-wymiarowa przestrzeń Euklidesowa. Iloczyn skalarny i norma euklidesowa.

2. Nierówność Schwarza (Twierdzenie 1) wraz z dowodem.

3. Metryka i norma euklidesowa w $\mathbb{R}^n$, kule otwarte i domknięte w $\mathbb{R}^n$, zbiory otwarte i domknięte w $\mathbb{R}^n$.

4. Zbieżność ciągów w $\mathbb{R}^n$. Charakteryzacja ciągów zbieżnych w $\mathbb{R}^n$ do x_0.

5. Granica odwzorowania i ciągłość funkcji w $\mathbb{R}^n$ (w sensie Cauchy'ego i Heinego). Własności funkcji ciągłych.

6. Pochodne kierunkowe i cząstkowe funkcji. Przykłady.

7. Definicja odwzorowania liniowego i różniczki odwzorowania. Pojęcie gradientu funkcji, macierzy Jacobiego i jakobianu odwzorowania. Przykłady.

8. Związek pomiędzy różniczką odwzorowania a pochodnymi kierunkowymi i cząstkowymi (Stwierdzenie 12 i Twierdzenie 4).

9. Twierdzenie o pochodnej odwzorowania dwuliniowego (Twierdzenie 5) wraz z przykładami.

10. Twierdzenia o różniczce złożenia (Twierdzenie 6) wraz z dowodem.

11. Twierdzenia o wartości średniej dla funkcji (Twierdzenie 7) wraz z dowodem i twierdzenie o wartości średniej dla odwzorowań (Twierdzenie 8).

12. Twierdzenie o funkcji odwrotnej (Twierdzenie 10). Wzór na różniczkę funkcji odwrotnej.

13. Definicja dyfeomorfizmu. Przykłady.

14. Definicja płatu k-wymiarowego, rozmaitości k-wymiarowej, mapy rozmaitości i atlasu. Przykłady.

15. Definicja wektora stycznego i twierdzenie o przestrzeni stycznej do rozmaitości (Twierdzenie 11).

16. Twierdzenie o funkcji uwikłanej (Twierdzenie 12). Przykłady.

17. Twierdzenie o rozmaitości M o równania $F(x) = 0$ (Twierdzenie 13). Definicja wektorów normalnych do rozmaitości M w x_0 i wzór na znalezienie przestrzeni wektorów normalnych i stycznych do M w x_0.

18. Ekstrema lokalne funkcji. Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego (Twierdzenie 14) wraz z dowodem.

19. Twierdzenie o mnożnikach Lagrange'a (Twierdzenie 15). Przykłady stosowania.

20. Definicja pochodnych cząstkowych i różniczek wyższego rzędu. Przykłady.

21. Odwzorowania symetryczne, macierz Hessego, twierdzenie Schwarza o symetrii drugiej różniczki (Twierdzenie 18) i jego uogólnienie na k-te różniczki (Twierdzenie 19).

22. Dodatnia i ujemna określoność formy kwadratowej — definicja, kryteria, przykłady.

23. Warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego (Twierdzenie 21) wraz z dowodem i jego uogólnienie (Twierdzenie 22).

24. Wzór Taylora dla funkcji (Twierdzenie 23) wraz z dowodem i wzór Taylora dla odwzorowań (Twierdzenie 24). Przykłady stosowania.

25. Podział przedziału, objętość przedziału, sumy dolne i górne, konstrukcja całki z funkcji na przedziale w $\mathbb{R}^n$, przykłady całek policzonych z definicji.

26. Funkcje całkowalne, kryteria całkowalności funkcji (Twierdzenie 25 i 31), przykłady.

27. Zbiory miary zero i objętości zero — definicje, przykłady, zależności między nimi.

28. Wahanie funkcji i jej związek z ciągłością.

29. Funkcje charakterystyczne zbioru, całki po dowolnych zbiorach, zbiory mierzalne w sensie Jordana, objętości zbiorów.

30. Całki dolne i górne, twierdzenie Fubiniego (Twierdzenie 33) wraz z dowodem i przykłady jego stosowania.

31. Twierdzenie o zamianie zmiennych w całkach (Twierdzenie 37) i jego zastosowanie przy zamianie zmiennych na zmienne biegunowe, sferyczne i walcowe.

32. Całki krzywoliniowe niezorientowane i zorientowane — definicje, jak obliczać, przykłady.

33. Twierdzenie Greena (Twierdzenie 39) wraz z dowodem i jego zastosowania.

34. Pole potencjalne i jego własności, obliczanie całek z potencjalnego pola wektorowego, warunek konieczny i wystarczający potencjalności pola na płaszczyźnie (Stwierdzenie 19) wraz z dowodem.

35. Wyznacznik Grama i jego interpretacja geometryczna, definicja niezorientowanej całki na rozmaitości, przykłady.