Procesy stochastyczne. Kolokwium numer I
26 listopada 2010 r. Grupa A

Zadanie 1. (10 punktów) Znajdź liczbę dróg w błądzeniu losowym z $S_0 = 0$ do $S_{4n} = 0$ spełniających następujące warunki:

- $S_k \leqslant 0$ dla $0 \leqslant k \leqslant 2n$;
- $S_k > 0$ dla $2n < k < 4n$.

Zadanie 2. (20 punktów) Gracz z kapitałem początkowym $k = 3$ zł gra do momentu bankructwa lub do chwili uzbierania $N = 5$ zł. W każdej grze wygrywa 1 zł prawdopodobieństwem $p = \frac{1}{2}$ przegrywa 2 zł z prawdopodobieństwem $q = \frac{1}{4}$ lub gra kończy się remisem z prawdopodobieństwem $r = \frac{1}{4}$.
a) Oblicz prawdopodobieństwo, że gracz uzbiera 5 zł.
b) Oblicz średni czas trwania gry.

Zadanie 3. (20 punktów) Niech $\{Z_n \colon n \geqslant 0\}$ będzie procesem gałązkowym takim, że $Z_0 = 1$, a Z_1 ma następujący rozkład: $P(Z_1 = 0) = \frac{1}{6}$, $P(Z_1 = 1) = \frac{1}{3}$ i $P(Z_1 = 2) = \frac{1}{2}$.
a) Oblicz prawdopodobieństwo wymarcia populacji.
b) Oblicz $P(T = 2)$, gdzie T — moment wyginięcia populacji ($T = \min\{n \geqslant 0 \colon Z_n = 0\}$).

Procesy stochastyczne. Kolokwium numer I
26 listopada 2010 r. Grupa B

Zadanie 1. (10 punktów) Znajdź liczbę dróg w błądzeniu losowym z $S_0 = 0$ do $S_{4n} = 0$ spełniających następujące warunki:

- $S_k < 0$ dla $0 < k < 2n$;
- $S_k \geqslant 0$ dla $2n \leqslant k \leqslant 4n$.

Zadanie 2. (20 punktów) Na płaszczyźnie siedzi mucha w punkcie $(0, k)$, $k = 2$, przy czym pierwsza współrzędna oznacza czas a druga położenie. Mucha w kolejnych momentach czasu zachowuje się w następujący sposób: nie zmienia swojego położenia z prawdopodobieństwem $p = \frac{1}{4}$, przechodzi o jeden w górę z prawdopodobieństwem $q = \frac{1}{2}$ i o 2 w dół z prawdopodobieństwem $r = \frac{1}{4}$. Obserwujemy spacer muchy do momentu gdy osiągnie ona położenie $N = 4$ lub osiągnie lu przeskoczy położenie zerowe.
a) Oblicz prawdopodobieństwo, że mucha osiągnie położenie $N = 4$.
b) Oblicz średni czas trwania spaceru muchy.

Zadanie 3. (20 punktów) Niech $\{Z_n \colon n \geqslant 0\}$ będzie procesem gałązkowym takim, że $Z_0 = 1$, a Z_1 ma następujący rozkład: $P(Z_1 = 0) = \frac{1}{4}$, $P(Z_1 = 1) = \frac{1}{4}$ i $P(Z_1 = 2) = \frac{1}{2}$.
a) Oblicz prawdopodobieństwo wymarcia populacji.
b) Oblicz $P(T = 3)$, gdzie T — moment wyginięcia populacji ($T = \min\{n \geqslant 0 \colon Z_n = 0\}$).