

Egzamin z procesów stochastycznych. Zadania. 1 II 2016.

Imię i Nazwisko:

Numer indeksu:

Zadanie 1. (7 punktów) Na płaszczyźnie siedzą dwie muchy. Pierwsza znajduje się w punkcie $(0, 0)$ a druga w $(0, 6)$, przy czym pierwsza współrzędna oznacza czas a druga położenie. Muchy zaczynają niezależnie przemieszczać się w sposób losowy. Każda z nich przechodzi w kolejnych momentach czasu o 1 w górę lub 1 w dół z prawdopodobieństwami $\frac{1}{2}$. Eksperyment kończy się w momencie gdy muchy się spotkają lub gdy odległość między nimi wynosi 10. Oblicz wartość oczekiwaną czasu trwania eksperymentu.

Zadanie 2. (7 punktów) Rozważmy pewną społeczność, w której każdy człowiek ma dokładnie 3 dzieci. Każde z dzieci jest z równym prawdopodobieństwem chłopcem lub dziewczynką. Oblicz:

- prawdopodobieństwo, że męska linia wyginie.
- średnią liczbę mężczyzn w k -tym pokoleniu.
- prawdopodobieństwo, że linia męska wymrze w 2 pokoleniu.

Zadanie 3. (7 punktów) 3 kule białe i 3 kule czarne umieszczono w dwu pudełkach, po 3 kule w każdym. Stan układu jest opisany przez podanie liczby kul białych w pierwszym pudełku. Przejście pomiędzy stanami odbywa się w następujący sposób: z obu pudełek losujemy po jednej kuli (niezależnie od siebie), po czym zamieniamy dla kul pudełka. Wykaż, że dostaniemy jednorodny łańcuch Markowa. Znajdź jego przestrzeń stanów i macierz przejścia. Jaki jest rozkład stacjonarny dla tego łańcucha?

Zadanie 4. (7 punktów) Samochody jadą autostradą $A1$ i $A2$ zgodnie z rozkładem Poissona z częstotliwością odpowiednio 30 i 45 na minutę. Oblicz:

- Oczekiwaną długość czasu po którym przez skrzyżowanie autostrad $A1$ i $A2$ w Strykowie przejedzie 2000 samochodów.
- Prawdopodobieństwo, że w ciągu 4 minut przez to skrzyżowanie dróg przejedzie 120 samochodów.

Zadanie 5. (7 punktów) Niech W_t będzie procesem Wienera. Zbadać, czy proces

$$B_t = \begin{cases} W_t & \text{dla } t \leq 20 \\ 2W_{20} - W_t & \text{dla } t > 20 \end{cases}$$

też jest procesem Wienera.