

Procesy stochastyczne z zastosowaniami.
Kolokwium numer 1. Zestaw A. 21 listopada 2016 r.

Zadanie 1. (10 punktów) Rozwiąż równanie różnicowe

$$a_{k+2} - 4a_{k+1} + 3a_k = 1, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 0.$$

Zadanie 2. (10 punktów) Znajdź liczbę dróg w błędzeniu losowym z S_0 do S_{4n} spełniających jednocześnie poniższe warunki:

- a) $S_0 = S_{2n} = 0$,
- b) $S_k \geq 1$ dla $1 \leq k \leq 2n - 1$,
- c) $S_{4n} = 2$.

Zadanie 3. (15 punktów) Gracz z kapitałem początkowym $k = 3$ zł gra do momentu bankructwa lub do chwili uzbierania $N = 8$ zł. W każdej grze wygrywa 1 zł z prawdopodobieństwem $p = \frac{1}{5}$, przegrywa 1 zł z prawdopodobieństwem $q = \frac{2}{5}$ lub gra kończy się remisem z prawdopodobieństwem $r = \frac{2}{5}$. Oblicz prawdopodobieństwo ruiny gracza.

Zadanie 4. (15 punktów) Rozważmy pewną populację świnek morskich pochodzących od jednej samiczki, w której każda samiczka rodzi dokładnie dwójkę małych. Każde małe jest z prawdopodobieństwem $\frac{3}{5}$ samiczką.

- a) Znajdź prawdopodobieństwo wymarcia populacji.
- b) Znajdź prawdopodobieństwo, że wymarcie nastąpi dokładnie w drugim pokoleniu.
- c) Znajdź średnią liczbę samiczek w n -tym pokoleniu.

Procesy stochastyczne z zastosowaniami.
Kolokwium numer 1. Zestaw B. 21 listopada 2016 r.

Zadanie 1. (10 punktów) Rozwiąż równanie różnicowe

$$a_{k+2} - 3a_{k+1} + 2a_k = -4, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 0.$$

Zadanie 2. (10 punktów) Znajdź liczbę dróg w błędzeniu losowym z S_0 do S_{4n} spełniających jednocześnie poniższe warunki:

- a) $S_0 = 0$,
- b) $S_{2n} = 2$,
- c) $S_k \geq 3$ dla $2n + 1 \leq k \leq 4n$,
- d) $S_{4n} = 4$.

Zadanie 3. (15 punktów) Gracz z kapitałem początkowym $k = 4$ zł gra do momentu bankructwa lub do chwili uzbierania $N = 7$ zł. W każdej grze wygrywa 1 zł z prawdopodobieństwem $p = \frac{2}{4}$, przegrywa 1 zł z prawdopodobieństwem $q = \frac{1}{4}$ lub gra kończy się remisem z prawdopodobieństwem $r = \frac{1}{4}$. Oblicz średni czas trwania gry.

Zadanie 4. (15 punktów) Rozważmy pewną populację kanarków pochodzących od jednej samiczki, w której każda samiczka rodzi dokładnie dwójkę małych. Każde małe jest z prawdopodobieństwem $\frac{3}{4}$ samiczką.

- a) Znajdź prawdopodobieństwo wymarcia populacji.
- b) Znajdź prawdopodobieństwo, że wymarcie nastąpi dokładnie w drugim pokoleniu.
- c) Znajdź średnią liczbę samiczek w 10-tym pokoleniu.