Egzamin z procesów stochastycznych. Zadania. 19 XII 2024.

Imię i Nazwisko: .... Numer indeksu: ....

Zadanie 1. (10 punktów) Na płaszczyźnie siedzą dwie muchy. Pierwsza znajduje się w punkcie $(0,0)$ a druga w $(0,8)$, przy czym pierwsza współrzędna oznacza czas a druga położenie. Muchy zaczynają niezależnie przemieszczać się w sposób losowy. Każda z nich przechodzi w kolejnych momentach czasu o 1 w górę z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$ lub o 1 w dół z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$. Jeśli odległość pomiedzy muchami jest równa 12 to muchy odlatują. Obliczyć prawdopodobieństwo, że muchy się spotkają i średni czas trwania eksperymentu (tzn. do momentu gdy muchy się spotkają lub odlecą).

Zadanie 2. (15 punktów) Rozpatrzmy proces stochastyczny S_n będący uogólnieniem błądzenia losowego i zdefiniowany następująco: $S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i$, gdzie $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $P(X_i = 1) = 1/6$, $P(X_i = -1) = 1/3$ i $P(X_i = 0) = 1/2$ z barierami w zerze i dla $N = 3$, i takim, że $S_0 = k$ dla pewnego $0 < k < 3$. Znajdź macierz przejścia, określ które stany są chwilowe, powracające zerowe lub powracające niezerowe, a także znajdź wszystkie rozkłady stacjonarne. Rozpatrz następujące przypadki:
a) obie bariery są pochłaniające,
b) obie bariery są odbijające,
c) w 0 jest bariera pochłaniająca, a w $N = 3$ odbijająca.

Zadanie 3. (10 punktów) Niech $\{X_t : t \geqslant 0\}$ będzie procesem Markowa na przestrzeni stanów $S = \{1, 2, 3\}$ z generatorem postaci

$$G = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Wyznaczyć półgrupę $\{P_t : t \geqslant 0\}$ i znaleźć rozkład stacjonarny.
b) Znaleźć łańcuch skoków procesu X i podać średnie czasy przebywania procesu X w każdym ze stanów z przestrzeni S.
c) Obliczyć $P(X_2 = 3 \mid X_4 = 1,\ X_0 = 1,\ X_3 = 3,\ X_5 = 1)$.