Procesy stochastyczne z zastosowaniami.
Kolokwium I. Zestaw A. 14 listopada 2024 r.

Zadanie 1. (15 punktów) Rozwiąż równanie różnicowe

$$2a_{k+2} - 8a_{k+1} + 6a_k = 2 \cdot 2^k - 4 \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 0.$$

Zadanie 2. (15 punktów) Znajdź liczbę dróg w błądzeniu losowym z S_0 do S_{4n} spełniających jednocześnie poniższe warunki:
a) $S_0 = 0$,
b) $S_k \neq 0$ dla $0 < k < 2n$,
c) $S_{2n} = 0$,
c) $S_k \leqslant 3$ dla $2n < k < 4n$,
d) $S_{4n} = 0$.

Zadanie 3. (20 punktów) Rozważmy pewną populację chomików pochodzących od jednej samiczki, w której każda samiczka rodzi dokładnie trójkę małych. Każde małe jest z prawdopodobieństwem 1/2 samiczką.
a) Znajdź funkcję tworzącą liczby samiczek w pierwszym pokoleniu
b) Znajdź prawdopodobieństwo wymarcia populacji.
c) Znajdź prawdopodobieństwo, że wymarcie nastąpi dokładnie w drugim pokoleniu.
d) Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję liczby samiczek w drugim pokoleniu.

Wzory, które być może się przydadzą:

- $P(M_n \geqslant r, S_n = b) = \begin{cases} P(S_n = b) & \text{dla} \quad b \geqslant r \\ (q/p)^{r-b} P(S_n = 2r - b) & \text{dla} \quad b < r. \end{cases}$
- $P_0(s) = 1 + P_0(s)F_0(s)$.
- $P_0(s) = (1 - 4pqs^2)^{-\frac{1}{2}}$.
- $F_0(s) = 1 - (1 - 4pqs^2)^{\frac{1}{2}}$.
- $F_1(s) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}}{2qs}$.
- Niech $\{Z_n\}$ dowolny proces gałązkowy. Wówczas

$$\operatorname{Var} Z_n = \begin{cases} n\sigma^2 & \text{dla} \quad \mu = 1 \\ \frac{\sigma^2(\mu^n - 1)\mu^{n-1}}{\mu - 1} & \text{dla} \quad \mu \neq 1. \end{cases}$$

- Niech Z_1 ma rozkład geometryczny z parametrami (p, q). Wówczas

$$G_n(s) = \begin{cases} \frac{n - (n-1)s}{n + 1 - ns} & \text{dla} \quad p = q = \frac{1}{2} \\ \frac{q[p^n - q^n - ps(p^{n-1} - q^{n-1})]}{p^{n+1} - q^{n+1} - ps(p^n - q^n)} & \text{dla} \quad p \neq q. \end{cases}$$

Procesy stochastyczne z zastosowaniami.
Kolokwium I. Zestaw B. 14 listopada 2024 r.

Zadanie 1. (15 punktów) Rozwiąż równanie różnicowe

$$-c_{n+2} + 4c_{n+1} - 3c_n = 2 - 2^n \quad c_0 = 0, \quad c_1 = 0.$$

Zadanie 2. (15 punktów) Znajdź liczbę dróg w błądzeniu losowym z S_0 do S_{4n} spełniających jednocześnie poniższe warunki:
a) $S_0 = 0$,
b) $S_k \leqslant 2$ dla $0 < k < 2n$,
c) $S_{2n} = 0$,
c) $S_k \neq 0$ dla $2n < k < 4n$,
d) $S_{4n} = 0$.

Zadanie 3. (20 punktów) Rozważmy pewną populację bakterii pochodzących od jednej żywej bakterii. Każda żywa bakteria dzieli się dokładnie na trzy nowe bakterie, z których każda jest martwa z prawdopodobieństwem $1/2$.
a) Znajdź funkcję tworzącą liczby żywych bakterii w pierwszym pokoleniu
b) Znajdź prawdopodobieństwo, że wymarcie nastąpi dokładnie w drugim pokoleniu.
c) Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję liczby żywych bakterii w drugim pokoleniu.
d) Znajdź prawdopodobieństwo wymarcia populacji.

Wzory, które być może się przydadzą:

- $P(M_n \geqslant r, S_n = b) = \begin{cases} P(S_n = b) & \text{dla} \quad b \geqslant r \\ (q/p)^{r-b} P(S_n = 2r - b) & \text{dla} \quad b < r. \end{cases}$
- $P_0(s) = 1 + P_0(s)F_0(s)$.
- $P_0(s) = (1 - 4pqs^2)^{-\frac{1}{2}}$.
- $F_0(s) = 1 - (1 - 4pqs^2)^{\frac{1}{2}}$.
- $F_1(s) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}}{2qs}$.
- Niech $\{Z_n\}$ dowolny proces gałązkowy. Wówczas

$$\operatorname{Var} Z_n = \begin{cases} n\sigma^2 & \text{dla} \quad \mu = 1 \\ \frac{\sigma^2(\mu^n - 1)\mu^{n-1}}{\mu - 1} & \text{dla} \quad \mu \neq 1. \end{cases}$$

- Niech Z_1 ma rozkład geometryczny z parametrami (p, q). Wówczas

$$G_n(s) = \begin{cases} \frac{n - (n-1)s}{n + 1 - ns} & \text{dla} \quad p = q = \frac{1}{2} \\ \frac{q[p^n - q^n - ps(p^{n-1} - q^{n-1})]}{p^{n+1} - q^{n+1} - ps(p^n - q^n)} & \text{dla} \quad p \neq q. \end{cases}$$