Procesy stochastyczne z zastosowaniami.
Kolokwium II. Zestaw A. 12 grudnia 2024 r.

Zadanie 1. (10 punktów) Niech X_i bedą wynikami kolejnych rzutów kostką i niech $Y_n = 3(X_1^2 \cdot ... \cdot X_n^2) \mod 5$. Wykaż, że ciąg $\{Y_n \colon n \geqslant 1\}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa. Znajdź przestrzeń stanów i macierz przejścia. Przeprowadź klasyfikację stanów tego łańcucha.

Zadanie 2. (15 punktów) Niech X łańcuch Markowa o przestrzeni stanów $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i macierzy przejścia P. Przeprowadź klasyfikację stanów łańcucha X. Znajdź zamknięte zbiory stanów. Dla zamkniętych zbiorów będących łańcuchami nieprzywiedlnymi znajdź rozkład stacjonarny. Oblicz P^n, a następnie korzystając z twierdzenia ergodycznego znajdź średnie czasy powrotu, jeśli

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3. (15 punktów) Przypuśćmy, że 4 kule białe i 2 kule czarne umieszczono losowo w dwu pudełkach, po 3 kule w każdym. Stan układu jest opisany przez podanie liczby kul białych w pierwszym pudełku. Przejście pomiedzy stanami odbywa się w następujący sposób: z obu pudełek losujemy po jednej kuli (niezależnie od siebie), po czym zamieniamy dla kul pudełka. Wykaż, że dostaniemy jednorodny łańcuch Markowa. Znajdź jego przestrzeń stanów i macierz przejścia. Scharakteryzuj stany tego łańcucha i podaj zbiory zamknięte nieprzywiedlne stanów. Jaki jest rozkład stacjonarny dla tego łańcucha?

Zadanie 4. (10 punktów) Niech $\{N_t \colon t \geqslant 0\}$ z $N_0 = 0$ będzie procesem narodzin zliczającym liczbę zdarzeń z intensywnościami $\lambda_n = n+3-2(-1)^n$ $(n \geqslant 0)$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że po czasie t zajdzie dokładnie 1 zdarzenie. Po jakim średnio czasie zajdzie 6 zdarzeń?

Wzory, które być może się przydadzą:

- Równania w przód dla procesu narodzin:

$$p'_{ij}(t) = \lambda_{j-1} p_{i,j-1}(t) - \lambda_j p_{ij}(t) \quad \text{z} \quad \lambda_{-1} = 0 \quad \text{i} \quad p_{ij}(0) = \delta_{ij}.$$

Procesy stochastyczne z zastosowaniami.
Kolokwium II. Zestaw B. 12 grudnia 2024 r.

Zadanie 1. (10 punktów) Niech X_i bedą wynikami kolejnych rzutów kostką i niech $Y_n = 4(X_1^2 \cdot ... \cdot X_n^2) \mod 5$. Wykaż, że ciąg $\{Y_n \colon n \geqslant 1\}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa. Znajdź przestrzeń stanów i macierz przejścia. Przeprowadź klasyfikację stanów tego łańcucha.

Zadanie 2. (15 punktów) Niech X łańcuch Markowa o przestrzeni stanów $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i macierzy przejścia P. Przeprowadź klasyfikację stanów łańcucha X. Znajdź zamknięte zbiory stanów. Dla zamkniętych zbiorów będących łańcuchami nieprzywiedlnymi znajdź rozkład stacjonarny. Oblicz P^n, a następnie korzystając z twierdzenia ergodycznego znajdź średnie czasy powrotu, jeśli

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/4 & 0 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3. (15 punktów) Przypuśćmy, że 2 kule białe i 4 kule czarne umieszczono losowo w dwu pudełkach, po 3 kule w każdym. Stan układu jest opisany przez podanie liczby kul białych w pierwszym pudełku. Przejście pomiedzy stanami odbywa się w następujący sposób: z obu pudełek losujemy po jednej kuli (niezależnie od siebie), po czym zamieniamy dla kul pudełka. Wykaż, że dostaniemy jednorodny łańcuch Markowa. Znajdź jego przestrzeń stanów i macierz przejścia. Scharakteryzuj stany tego łańcucha i podaj zbiory zamknięte nieprzywiedlne stanów. Jaki jest rozkład stacjonarny dla tego łańcucha?

Zadanie 4. (10 punktów) Niech $\{N_t \colon t \geqslant 0\}$ z $N_0 = 0$ będzie procesem narodzin zliczającym liczbę zdarzeń z intensywnościami $\lambda_n = 2n+3-n(-1)^n$ $(n \geqslant 0)$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że po czasie t zajdzie dokładnie 1 zdarzenie. Po jakim średnio czasie zajdzie 6 zdarzeń?

Wzory, które być może się przydadzą:

- Równania w przód dla procesu narodzin:

$$p'_{ij}(t) = \lambda_{j-1} p_{i,j-1}(t) - \lambda_j p_{ij}(t) \quad \text{z} \quad \lambda_{-1} = 0 \quad \text{i} \quad p_{ij}(0) = \delta_{ij}.$$