2 Rozwiązywanie równań wokół punktów regularnych osobliwych — w postaci szeregów Frobeniusa

Poniższy rozdział został opracowany w większości na podstawie podręcznika A. Palczewskiego [7]. Pewne wyliczenia pochodzą z książki E.T. Whittakera i G.N. Watsona [9].

Twierdzenie 2.1 (Frobeniusa) *Niech t_0 będzie regularnym punktem osobliwym równania (1.2). Załóżmy, że funkcje*

$$(t-t_0)p(t) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(t-t_0)^i, \qquad (t-t_0)^2 q(t) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i(t-t_0)^i \tag{2.1}$$

są analityczne dla $|t-t_0| < R$. Niech dalej l_1 i l_2 będą pierwiastkami równania indeksowego

$$l(l-1) + p_0 l + q_0 = 0.$$

Dla ustalenia uwagi przypuśćmy, że jeśli l_1 i l_2 są rzeczywiste to $l_1 \geqslant l_2$. Wówczas równanie (1.2) ma dwa liniowo niezależne rozwiązania w przedziale $t_0 < t < t_0 + R$, które mają postać:
1) jeśli $l_1 - l_2 \notin \mathbb{N}_0$ to

$$x_1(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(t-t_0)^{l_1+i}, \qquad x_2(t) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i(t-t_0)^{l_2+i};$$

2) jeśli $l_1 = l_2$ to

$$x_1(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(t-t_0)^{l_1+i}, \qquad x_2(t) = x_1(t)\ln(t-t_0) + \sum_{i=0}^{\infty} b_i(t-t_0)^{l_1+i};$$

3) jeśli $l_1 - l_2 \in \mathbb{N}$ to

$$x_1(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(t-t_0)^{l_1+i}, \qquad x_2(t) = cx_1(t)\ln(t-t_0) + \sum_{i=0}^{\infty} b_i(t-t_0)^{l_2+i},$$

gdzie stała c może być równa zeru.

Dowód. Dla uproszczenia zapisu przyjmijmy $t_0 = 0$. Mnożąc równanie (1.2) przez t^2 i korzystając z (2.1) dostajemy

$$t^2\ddot{x} + t(p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \dots)\dot{x} + (q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + \dots)x = 0. \tag{2.2}$$

Rozwiązania tego równania będziemy szukać w postaci *szeregu Frobeniusa* $x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^{i+l}$, gdzie $a_0 \neq 0$. Wstawiając ten szereg do równania (2.2) i przyrównując do zera współczynniki przy potęgach t dostajemy

$$l(l-1) + p_0 l + q_0 = 0 \quad \text{dla} \quad i = 0 \tag{2.3}$$

$$\big((i+l)(i+l-1) + p_0(i+l) + q_0\big)a_i + \sum_{j=1}^{i} \big(p_j(i-j+l) + q_j\big)a_{i-j} = 0 \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \dots \tag{2.4}$$

Z równania (2.3) możemy wyliczyć parametr l w rozwinięciu $x(t)$. Za a_0 możemy przyjąć dowolną wartość (np. 1). Aby zaś wyliczyć a_i ($i = 1, 2, \dots$) musi zachodzić

$$(i+l)(i+l-1) + p_0(i+l) + q_0 \neq 0. \tag{2.5}$$

Jeśli lewą stronę (2.3) oznaczymy przez $F(l)$, to lewa strona (2.5) jest równa $F(i+l)$. Zatem jednoczesne spełnianie (2.3) i (2.5) dla $i = 1, 2, \dots$ jest tylko możliwe jeśli l_1, l_2 — dwa pierwiastki (2.3) — nie różnią się o liczbę naturalną. Wówczas do (2.5) wstawiamy za l te pierwiastki i otrzymujemy dwa ciągi współczynników: a_i oraz b_i. W ten sposób otrzymamy dwa liniowo niezależne rozwiązania

$$x_1(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^{l_1+i}, \qquad x_2(t) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^{l_2+i}.$$

Ponieważ różnica $l_1 - l_2$ nie jest całkowita, to powyższe równania są liniowo niezależne. Podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 1.4 wykażemy, że szeregi definiujące rozwiązania są zbieżne dla $t \in (0, R)$. Wystarczy pokazać, że szereg $\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ jest zbieżny dla $|t| < R$. W tym celu weźmy $r < R$ i zauważmy, że dla pewnego $M > 0$ zachodzi

$$|p_i| r^i \leqslant M, \ \ |q_i| r^i \leqslant M \quad \text{dla} \quad i = 0, 1, 2, \ldots,$$

gdyż wyrazy szeregu zbieżnego są ograniczone i dążą do zera. Korzystając z powyższych nierówności i z równania (2.4) dostajemy oszacowanie wyrazów a_i (dla $l = l_1$) i b_i (dla $l = l_2$).

$$|F(i+l)||a_i| \leqslant \frac{M}{r^i} \sum_{j=0}^{i-1} (j+l+1) r^j |a_j|.$$

Zdefiniujmy teraz szereg nieujemny d_i

$$d_0 = |a_0|, \qquad |F(i+l)| d_i = \frac{M}{r^i} \sum_{j=0}^{i-1} (j+l+1) r^j d_j.$$

Zauważmy, że

$$r|F(i+l)|d_i = |F(i+l-1)|d_{i-1} + M(i+l)d_{i-1},$$

więc

$$\frac{d_i}{d_{i-1}} = \frac{|F(i+l-1)| + M(i+l)}{r|F(i+l)|}, \quad \text{a stąd} \quad \lim_{i\to\infty} \left| \frac{d_i}{d_{i-1}} \right| = \frac{1}{r}.$$

Oznacza to, podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 1.4, że szeregi $\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ i $\sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i$ są zbieżne dla $|t| < R$.

Załózmy teraz, że $l_1 = l_2$. Wtedy oczywiście nierówność (2.5) jest spełniona dla $i = 1, 2, \ldots$, a ze wzoru (2.4) można wyznaczyć współczynniki a_i i otrzymać rozwiązanie

$$x_1(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^{l_1+i}.$$

stosując metodę redukcji równania (Stwierdzenie 1.3) znajdujemy drugie liniowo niezależne rozwiązanie (1.2) w postaci

$$x_2(t) = x_1(t) u(t) = x_1(t) \int_{c_0}^{t} \frac{e^{-P(s)}}{x_1^2(s)} d\,s,$$

gdzie c_0 jest dowolnie wybraną stałą. W naszym przypadku $P(s) = p_0 \ln s + p_1 s + \frac{p_2 s^2}{2} + \frac{p_3 s^3}{3} + \ldots$, a więc

$$u(t) \quad = \quad \int_{c_0}^{t} \frac{s^{-p_0} e^{-p_1 s - \frac{p_2 s^2}{2} - \ldots}}{s^{2l_1} (\sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i)^2} d\,s = \int_{c_0}^{t} s^{-p_0 - 2l_1} g(s) d\,s = \int_{c_0}^{t} \frac{g(s)}{s} d\,s,$$

gdzie ostatnia równość wynika z faktu, że równanie (2.3) można zapisać w postaci $(l - l_1)^2 = 0$, a więc $2l_1 = 1 - p_0$. Zauważmy, że $g(s)$ jest funkcją analityczną w pewnym otoczeniu zera i $g(0) = \frac{1}{a_0^2}$. Z dowolności wyboru a_0 możemy przyjąć, że $g(0) = 1$ i $g(s) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} g_i s^i$. Mamy wówczas

$$x_2(t) = x_1(t) \int_{c_0}^{t} \frac{g(s)}{s} d\,s = x_1(t) \int_{c_0}^{t} \Big(\frac{1}{s} + \sum_{i=1}^{\infty} g_i s^{i-1} \Big) d\,s = x_1(t) \ln t + x_1(t) \Big(\widetilde{c_0} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_i}{i} t^i \Big) = x_1(t) \ln t + \sum_{i=0}^{\infty} h_i t^{i+l_1}.$$

Na mocy Stwierdzenia 1.3 rozwiązania $x_1(t)$ i $x_2(t)$ są linowo niezależne. Podobnie jak poprzednio pokazujemy zbieżność szeregów.

Załóżmy w końcu, że $l_1 = l_2 + N$, gdzie $N \in \mathbb{N}$. Tak jak poprzednio dostajemy rozwiązanie

$$x_1(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^{l_1+i},$$

gdyż nierówność (2.5) jest spełniona dla $l = l_1$ oraz $i = 1, 2, \ldots$.

Znajdziemy teraz linowo niezależne $x_2(t)$. W tym celu spróbujemy wyznaczyć współczynniki przy $l = l_2$. Ze wzoru (2.4) dostajemy w szczególności równanie

$$F(l_2 + N)a_N = -\sum_{j=1}^{N} \big(p_j(N - j + l_2) + q_j\big)a_{N-j}. \tag{2.6}$$

Ponieważ $F(l_2 + N) = 0$, więc są możliwe dwie sytuacje:
a) równanie jest spełnione — prawa strona (2.6) jest równa zeru,
b) równanie jest sprzeczne — prawa strona (2.6) jest różna od zera.

W przypadku a) możemy za a_N przyjąć dowolną wartość (ale tak, by $x_2(t)$ był niezależny od $x_1(t)$) i wyliczyć następne współczynniki (będziemy je oznaczać b_i). Otrzymamy wówczas drugie liniowo niezależne rozwiązanie

$$x_2(t) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^{l_2+i}. \tag{2.7}$$

W przypadku b) nie można wyznaczyć a_N, a więc i rozwiązania w postaci (2.7). Dlatego też musimy poszukać drugiego rozwiązania metodą redukcji rzędu równania w postaci

$$x_2(t) = x_1(t)\ln t + \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^{i+l_2}.$$

Podobnie jak poprzednio pokazujemy zbieżność szeregów definiujących rozwiązania. □

Ćwiczenia

1. Znajdź dwa liniowo niezależne rozwiązania równań rozwijając w szereg Frobeniusa wokół $t_0 = 0$. Na jakim obszarze są one określone?
   a) $2t^2(t+1)\ddot{x} + t(7t-1)\dot{x} + x = 0$,
   b) $2t\ddot{x} + 5(1+2t)\dot{x} + 5x = 0$,
   c) $t^2\ddot{x} - t(1+t)\dot{x} + x = 0$,
   d) $t^2\ddot{x} + t(t-1)\dot{x} + (1-t)x = 0$,
   e) $t(1-t)\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0$,
   f) $t\ddot{x} + (t^3-1)\dot{x} + t^2x = 0$,
   g) $t(1-t)\ddot{x} + 2(1-t)\dot{x} + 2x = 0$,
   h) $4t^2\ddot{x} + 2t(2-t)\dot{x} - (1+3t)x = 0$.

Literatura

[1] D. V. Anosov, A. A. Bolibruch, *The Riemann–Hilbert Problem*, Vieweg, Wiesbaden 1994.

[2] W Balser, *Formal Power Series and Linear Systems of Meromorphic Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, New York 2000.

[3] E. Hille, *Ordinary differential equations in the complex domain*, John Wiley & Sons, New York 1976.

[4] M. Holmes, *Introduction to Perturbation Methods*, Springer-Verlag, New York 1995.

[5] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Yoshida, *From Gaus to Painlevé. A Modern Theory of Special Functions*, Vieweg, Braunschweig 1991.

[6] R. O'Malley, *Singular perturbation methods for ordinary differential equations*, Springer-Verlag, New York 1991.

[7] A. Palczewski, *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT, Warszawa 1999.

[8] W. Wasow, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, John Wiley & Sons, New York 1965.

[9] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *Kurs analizy współczesnej*. Część I, PWN, Warszawa 1967.

[10] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *Kurs analizy współczesnej*. Część II, PWN, Warszawa 1968.

[11] B. Ziemian, *20 lectures on ordinary and differential equations. Geometric methods of complex analysis*, preprint, IM PAN, Warszawa 1992.