3 Badanie punktów w nieskończoności i równanie hipergeometryczne

Poniższy rozdział został opracowany w większości na podstawie książki E.T. Whittakera i G.N. Watsona [9].

3.1 Rozwiązania dla dużych wartości $|t|$

Zajmiemy się teraz badaniem rozwiązań równania

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0. \tag{3.1}$$

przy $|t| \to \infty$. W tym celu dokonajmy zamiany zmiennych. Niech $s = \frac{1}{t}$. Wówczas

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dx}{ds}\Big(-\frac{1}{t^2}\Big) = -s^2\frac{dx}{ds},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\Big(\frac{dx}{dt}\Big) = \frac{d}{ds}\Big(-s^2\frac{dx}{ds}\Big)\frac{ds}{dt} = \Big(-2s\frac{dx}{ds} - s^2\frac{d^2x}{ds^2}\Big)(-s^2) = s^4\frac{d^2x}{ds^2} + 2s^3\frac{dx}{ds}.$$

Zatem równanie 3.1 przyjmie postać

$$s^4\frac{d^2x}{ds^2} + \bigg(2s^3 - s^2p\Big(\frac{1}{s}\Big)\bigg)\frac{dx}{ds} + q\Big(\frac{1}{s}\Big)x = 0. \tag{3.2}$$

Definicja 3.1 Mówimy, że $t_0 = \infty$ jest *punktem nieosobliwym* (odpowiednio *osobliwym regularnym*, *osobliwym nieregularnym*) równania (3.1) jeśli $s_0 = 0$ jest punktem nieosobliwym (odpowiednio osobliwym regularnym, osobliwym nieregularnym) równania (3.2).

Wprost z definicji i z postaci równania (3.2) dostajemy

Stwierdzenie 3.2 *Punkt $t_0 = \infty$ jest punktem nieosobliwym równania (3.1) wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje $t \mapsto 2t - t^2p(t)$ i $t \mapsto t^4q(t)$ są analityczne w nieskończoności.*

Punkt $t_0 = \infty$ jest punktem regularnym osobliwym równania (3.1) wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje $t \mapsto tp(t)$ i $t^2q(t)$ są analityczne w nieskończoności.

3.2 Równanie hipergeometryczne

Zapoznamy się teraz z chyba najsłynniejszym równaniem różniczkowym zwyczajnym. Przedtem jednak wprowadźmy nowe oznaczenia skracające znacznie zapis.

Dla dowolnego a i $n \in \mathbb{N}_0$ wprowadźmy *funkcję silniową* (inaczej *symbol Pocchammera* lub *silnię Pocchammera*) oznaczaną przez $(a)_n$ lub $a^{\underline{n}}$ i zdefiniowaną wzorem

$$(a)_0 = a^{\underline{0}} = 1 \text{ dla } a \neq 0, \quad (a)_n = a^{\underline{n}} = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1) \quad \text{dla } n \geqslant 1.$$

W szczególności dla $a = 1$ dostajemy $(1)_n = n!$. Funkcję silniową da się również wyrazić za pomocą funkcji gamma Eulera

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}d\,t$$

wzorem

$$(a)_n = a^{\underline{n}} = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}.$$

Definicja 3.3 *Równaniem hipergeometrycznym* (lub *równaniem Gaussa*) nazywamy równanie liniowe 2. rzędu postaci

$$t(1-t)\ddot{x} + \big(c - (a+b+1)t\big)\dot{x} - abx = 0, \tag{3.3}$$

gdzie a, b i c są stałymi parametrami.

Zauważmy, że równanie to ma 3 punkty osobliwe — wszystkie regularne: 0, 1 i ∞. Odpowiadające im pierwiastki równania indeksowego to: $0, 1-c$; $0, c-a-b$; a, b. Zatem rozwiązań z logarytmami należy się spodziewać:
przy $t=0$: jeśli c jest całkowite,
przy $t=1$: jeśli $a+b-c$ jest całkowite,
przy $t=\infty$: jeśli $a-b$ jest całkowite.

Znajdziemy teraz rozwiązania równania hipergeometrycznego (3.3) wokół punktu $t_0=0$. Będziemy go szukać w postaci szeregu Frobeniusa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n t^{n+l}$. Wstawiając szereg do równania (3.3) dostajemy

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+l)(n+l+c-1)d_n t^{n+l-1}-\sum_{n=1}^{\infty}(n+l+a-1)(n+l+b-1)d_{n-1}t^{n+l-1}=0.$$

Wynikają stąd następujące zależności

$$\begin{aligned} &\text{dla } n=0: && l(l+c-1)=0\\ &\text{dla } n\geqslant 1: && (n+l)(n+l+c-1)d_n=(n+l+a-1)(n+l+b-1)d_{n-1}. \end{aligned}$$

Zatem pierwiastki równania indeksowego są równe $l_1=0$ i $l_2=1-c$. Aby uniknąć rozwiązań typu logarytmicznego przypuśćmy, że c nie jest całkowite. Mamy wówczas dla $n\geqslant 1$

$$d_n=\frac{(l+a)(l+a+1)\cdots(l+a+n)(l+b)(l+b+1)\cdots(l+b+n)}{(l+1)(l+2)\cdots(l+n)(l+c)(l+c+1)\cdots(l+c+n-1)}d_0=\frac{(a+l)_n(b+l)_n}{(1+l)_n(c+l)_n}d_0.$$

Przyjmując $d_0=1$ dostajemy rozwiązania

$$x_1(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}t^n \quad \text{dla} \quad l=l_1=0 \tag{3.4}$$

$$x_2(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+1-c)_n(b+1-c)_n}{(2-c)_n n!}t^{n+1-c} \quad \text{dla} \quad l=l_2=1-c. \tag{3.5}$$

Definicja 3.4 Rozwiązanie (3.4) równania hipergeometrycznego (3.3) nazywamy *funkcją hipergeometryczną* (lub *szeregiem hipergeometrycznym*) i oznaczamy przez

$${}_2F_1(a,b;c;t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}t^n. \tag{3.6}$$

Stosując np. kryterium d'Alemberta dostajemy, że szereg hipergeometryczny jest zbieżny dla $|t|<1$.

Zauważmy, że również drugie rozwiązanie da się wyrazić za pomocą funkcji hipergeometrycznej:

$$x_2(t)=t^{1-c}{}_2F_1(a+1-c,b+1-c;2-c;t).$$

Również rozwiązania równania hipergeometrycznego (3.3) wokół innych punktów osobliwych dadzą się wyrazić za pomocą funkcji (3.6). W przypadku rozwiązań bez logarytmów mają one postać:
— w otoczeniu punktu $t_0=1$:

$$y_1(t)={}_2F_1(a,b;a+b+1-c;1-t),\qquad y_2(t)=(1-t)^{c-a-b}{}_2F_1(c-a,c-b;c+1-a-b;1-t); \tag{3.7}$$

— w otoczeniu $t_0=\infty$:

$$z_1(t)=t^{-a}{}_2F_1(a,a-c+1;a-b+1;\frac{1}{t}),\qquad z_2(t)=t^{-b}{}_2F_1(b,b-c+1;b-a+1;\frac{1}{t}). \tag{3.8}$$

Równanie hipergeometryczne jest szczególnym przykładem *równań Fuchsa*, czyli takich równań, dla których wszystkie punkty (wraz z ∞) są nieosobliwe lub regularne osobliwe.

Poznamy teraz ogólną postać równań Fuchsa o trzech punktach regularnych osobliwych

Stwierdzenie 3.5 *Niech równanie (3.1) będzie równaniem Fuchsa z dokładnie 3 punktami osobliwymi regularnymi: a, b, c. Niech dalej odpowiadające im pierwiastki równania indeksowego będą odpowiednio:* α, α'; β, β'; γ, γ'. *Wówczas*

$$p(t) = \frac{1-\alpha-\alpha'}{t-a} + \frac{1-\beta-\beta'}{t-b} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{t-c}, \tag{3.9}$$

$$q(t) = \Big(\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{t-a} + \frac{\beta\beta'(b-c)(b-a)}{t-b} + \frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{t-c}\Big)\frac{1}{(t-a)(t-b)(t-c)}, \tag{3.10}$$

oraz

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1. \tag{3.11}$$

Dowód. Zauważmy, że $p(t)$ musi być funkcją wymierną o biegunach jednokrotnych w punktach a, b, c i residuach w tych biegunach równych odpowiednio $1-\alpha-\alpha'$, $1-\beta-\beta'$ i $1-\gamma-\gamma'$. Zatem

$$p(t) = \frac{1-\alpha-\alpha'}{t-a} + \frac{1-\beta-\beta'}{t-b} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{t-c} + d,$$

gdzie d jest stała. Z drugiej strony, ponieważ ∞ jest punktem nieosobliwym, to ze Stwierdzenia 3.2 funkcja $t \mapsto 2t - t^2p(t)$ jest analityczna w nieskończoności, czyli w szczególności

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t\to\infty} \frac{2t - t^2p(t)}{t^2} = d, \\ 0 &= \lim_{t\to\infty} \frac{2t - t^2p(t)}{t} = 2 - 1 + \alpha + \alpha - 1 + \beta + \beta' - 1 + \gamma + \gamma' - 1 = \alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' - 1. \end{aligned}$$

Co dowodzi (3.9) i (3.11). W podobny sposób wykazujemy (3.10). □

Ćwiczenia

1. Dla danych równań sprawdź, czy punkt $t_0 = \infty$ jest punktem nieosobliwym, punktem osobliwym regularnym czy też punktem osobliwym nieregularnym
   a) $t^3(t-1)\ddot{x} + (t-1)\dot{x} + 4tx = 0$,
   b) $t^2(t^2-4)\ddot{x} + 2t^3\dot{x} + 3x = 0$,
   c) $\ddot{x} + tx = 0$.

2. Znajdź rozwiązania równań dla dużych t
   a) $t^4\ddot{x} + t(1+2t^2)\dot{x} + 5x = 0$,
   b) $2t^3\ddot{x} - t(2-5t)\dot{x} + x = 0$,
   c) $t(1-t)\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0$,
   d) $t(1-t)\ddot{x} + (1-4t)\dot{x} - 2x = 0$,
   e) $t^4\ddot{x} + 2t^3\dot{x} + 4x = 0$.

3. Udowodnij, że równanie hipergeometryczne (3.3) może być zapisane w postaci

$$t\big((t\frac{d}{dt}) + a\big)\big((t\frac{d}{dt}) + b\big)x = (t\frac{d}{dt})\big((t\frac{d}{dt}) - 1 + c\big)x. \tag{3.12}$$

4. Wykaż, że funkcje zdefiniowane przez (3.7) i (3.8) są rozwiązaniami równania hipergeometrycznego (3.3).

5. Wykaż, że
   a) $(d/dt)\big({}_2F_1(a,b;c;t)\big) = (ab/c)\cdot {}_2F_1(a+1,b+1;c+1;t)$,
   b) $(1+t)^n = {}_2F_1(-n,b;b;-t)$,
   c) $\operatorname{arc\,tg} t = t \cdot {}_2F_1(1,\frac{1}{2};\frac{3}{2};-t^2)$,
   d) $e^t = \lim_{a\to\infty} {}_2F_1(a,1;1;t/a)$.

Literatura

[1] D. V. Anosov, A. A. Bolibruch, *The Riemann–Hilbert Problem*, Vieweg, Wiesbaden 1994.

[2] W Balser, *Formal Power Series and Linear Systems of Meromorphic Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, New York 2000.

[3] E. Hille, *Ordinary differential equations in the complex domain*, John Wiley & Sons, New York 1976.

[4] M. Holmes, *Introduction to Perturbation Methods*, Springer-Verlag, New York 1995.

[5] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Yoshida, *From Gaus to Painlevé. A Modern Theory of Special Functions*, Vieweg, Braunschweig 1991.

[6] R. O'Malley, *Singular perturbation methods for ordinary differential equations*, Springer-Verlag, New York 1991.

[7] A. Palczewski, *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT, Warszawa 1999.

[8] W. Wasow, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, John Wiley & Sons, New York 1965.

[9] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *Kurs analizy współczesnej*. Część I, PWN, Warszawa 1967.

[10] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *Kurs analizy współczesnej*. Część II, PWN, Warszawa 1968.

[11] B. Ziemian, *20 lectures on ordinary and differential equations. Geometric methods of complex analysis*, preprint, IM PAN, Warszawa 1992.