4 P-równanie Riemanna i jego związek z równaniem hipergeometrycznym. Postać całkowa Barnesa

Poniższy rozdział został opracowany na podstawie książki E.T. Whittakera i G.N. Watsona [9], monografii E. Hille'a [3] oraz pracy B. Ziemiana [11].

4.1 P-równanie Riemanna

Zaczniemy od nazwania równania, którego istnienie zostało wykazane w Stwierdzeniu 3.5 i które ma postać

$$\begin{aligned}\ddot{x} &+ \Big(\frac{1-\alpha-\alpha'}{t-a}+\frac{1-\beta-\beta'}{t-b}+\frac{1-\gamma-\gamma'}{t-c}\Big)\dot{x} \\ &+ \Big(\Big(\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{t-a}+\frac{\beta\beta'(b-c)(b-a)}{t-b}+\frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{t-c}\Big)\frac{1}{(t-a)(t-b)(t-c)}\Big)x=0\end{aligned} \tag{4.1}$$

Definicja 4.1 Równanie (4.1) o trzech osobliwościach regularnych a, b, c i o odpowiadających im pierwiastkach równania indeksowego α, α'; β, β'; γ, γ' spełniających (3.11) nazywamy *P-równaniem Riemanna*. Fakt, że x spełnia P-równanie Riemanna będziemy oznaczać poprzez

$$x = P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & t \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\}.$$

Oczywiście równanie hipergeometryczne jest szczególnym przypadkiem P-równania Riemanna, dla którego

$$x = P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & a & t \\ 1-c & c-a-b & b & \end{matrix}\right\}. \tag{4.2}$$

Ale z drugiej strony zachodzi również

Stwierdzenie 4.2 *Każde P-równanie Riemanna da się sprowadzić do równania hipergeometrycznego.*

Dowód. Najpierw wykażemy, że spełniona jest następująca transformacja:

$$\Big(\frac{t-a}{t-c}\Big)^k\Big(\frac{t-b}{t-c}\Big)^l P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & t \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\} = P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha+k & \beta+l & \gamma-k-l & t \\ \alpha'+k & \beta'+l & \gamma'-k-l & \end{matrix}\right\}. \tag{4.3}$$

Zauważmy, że P-równanie Riemanna jest określone jednoznacznie przez podanie trzech osobliwości i ich wykładników. Zatem jeśli x spełnia równanie (4.1), to $x_1(t) = \big((t-a)/(t-c)\big)^k\big((t-b)/(t-c)\big)^l x(t)$ spełnia równanie P-Riemanna o tych samych osobliwościach i wykładnikach $\alpha+k$, $\alpha'+k$; $\beta+l$, $\beta'+l$; $\gamma-k-l$, $\gamma'-k-l$. Oznacza to, że zachodzi transformacja (4.3).

Podobnie wykażemy, że zachodzi transformacja

$$P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & t \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\} = P\left\{\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & \\ \alpha & \beta & \gamma & t_1 \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\}, \tag{4.4}$$

gdzie t_1, a_1, b_1, c_1 są przekształcane na t, a, b, c za pomocą tej samej homografii (tzn. $t = (At_1+B)/(Ct_1+D)$ i podobnie dla a_1, b_1 i c_1). Oznacza to, że równanie względem t_1 jest równaniem liniowym rzędu drugiego o osobliwościach w punktach otrzymanych tym samym przekształceniem homograficznym, przy wykładnikach odpowiednio α, α'; β, β'; γ, γ'. A to oznacza, że zachodzi (4.4).

Korzystając z powyższych transformacji sprowadzimy teraz P-równanie Riemanna do równania hipergeometrycznego

$$\begin{aligned} P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & t \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\} &= \Big(\frac{t-a}{t-c}\Big)^\alpha\Big(\frac{t-b}{t-c}\Big)^\beta P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ 0 & 0 & \gamma+\alpha+\beta & t \\ \alpha'-\alpha & \beta'-\beta & \gamma'+\alpha+\beta & \end{matrix}\right\} \\ &= \Big(\frac{t-a}{t-c}\Big)^\alpha\Big(\frac{t-b}{t-c}\Big)^\beta P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \gamma+\alpha+\beta & t_1 \\ \alpha'-\alpha & \beta'-\beta & \gamma'+\alpha+\beta & \end{matrix}\right\}, \end{aligned}$$

gdzie $t_1 = \frac{(t-a)(b-c)}{(t-c)(b-a)}$. Oznacza to, porównując z (4.2), że P-równanie Riemanna może być wyrażone przez rozwiązanie równania hipergeometrycznego o elementach $a = \alpha + \beta + \gamma$, $b = \alpha + \beta + \gamma'$, $c = 1 + \alpha - \alpha'$ i t_1. □

4.2 Postać całkowa Barnesa

Lemat 4.3 (Lemat Barnesa) *Jeśli jest spełniony warunek* $\mathrm{Re}\,(-a),\ \mathrm{Re}\,(-b) < \tilde{c} - 1 < \tilde{c} < 0$, *to funkcja*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\tilde{c}-i\infty}^{\tilde{c}+i\infty} \frac{\Gamma(s+a)\Gamma(s+b)}{\Gamma(s+c)} \Gamma(-s)(-t)^s \, ds. \tag{4.5}$$

jest rozwiązaniem równania hipergeometrycznego.

Dowód. Zapiszmy równanie hipergeometryczne w postaci

$$t(t\frac{d}{dt} + a)(t\frac{d}{dt} + b)x = (t\frac{d}{dt})(t\frac{d}{dt} - 1 + c)x.$$

Zauważmy, że operator $t\frac{d}{dt}$ posiada następujące własności:

$$1. \quad (t\frac{d}{dt})t^a = at^a, \qquad 2. \quad (t\frac{d}{dt})(-t)^a = a(-t)^a.$$

Niech

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\tilde{c}-i\infty}^{\tilde{c}+i\infty} g(s)(-t)^s.$$

Aby $f(t)$ spełniało (4.2) musi zachodzić

$$\int\limits_{\tilde{c}-i\infty}^{\tilde{c}+i\infty} g(s)s(s-1+c)(-t)^s \, ds = -\int\limits_{\tilde{c}-i\infty}^{\tilde{c}+i\infty} g(s)(s+a)(s+b)(-t)^{s+1} \, ds.$$

Zauważmy, że jeśli funkcja $g(s)$ nie posiada biegunów dla Re $s \in [\tilde{c} - 1, \tilde{c}]$, to

$$\int\limits_{\tilde{c}-i\infty}^{\tilde{c}+i\infty} g(s)s(s-1+c)(-t)^s \, ds = \int\limits_{\tilde{c}-1-i\infty}^{\tilde{c}-1+i\infty} g(s+1)(s+1)(s+c)(-t)^{s+1} \, ds = \int\limits_{\tilde{c}-i\infty}^{\tilde{c}+i\infty} g(s+1)(s+1)(s+c)(-t)^{s+1} \, ds.$$

Zatem dostajemy

$$\int\limits_{\tilde{c}-i\infty}^{\tilde{c}+i\infty} \Big(g(s+1)(s+1)(s+c) + (s+a)(s+b)g(s) \Big) (-t)^{s+1} \, ds = 0.$$

Tak można zrobić o ile

$$\lim_{|\mathrm{Im}\, s| \to \infty} s^2 g(s)(-t)^s = 0. \tag{4.6}$$

Załóżmy na chwilę, że równość (4.6) jest spełniona. Wówczas dostajemy równanie różnicowe na $g(s)$ postaci

$$g(s+1) = -\frac{(s+a)(s+b)}{(s+c)(s+1)} g(s). \tag{4.7}$$

To równanie różnicowe (4.7) możemy rozwiązać w terminach funkcji gamma. Rozwiązaniem równania $u(s+1) = (s+d)u(s)$ jest $u(s) = \Gamma(s+d)$. Podobnie rozwiązaniem $u(s+1) = \frac{(s+a)(s+b)}{s+c} u(s)$ jest $u(s) = \frac{\Gamma(s+a)\Gamma(s+b)}{\Gamma(s+c)}$. Ponadto równanie $u(s+1) =$

$-\frac{u(s)}{s+1}$ ma rozwiązanie postaci $u(s) = \Gamma(-s)$ (bo $\Gamma(-s) = (-s-1)\Gamma(-s-1)$). Wobec tego rozwiązaniem równania (4.7) jest funkcja

$$g(s) = \frac{\Gamma(s+a)\Gamma(s+b)}{\Gamma(s+c)}\Gamma(-s).$$

Musmy teraz pokazać, że spełniony jest warunek (4.6). Po pierwsze zauważmy, że

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\Gamma(s+d)}{s^d\Gamma(s)} = 1 \quad \text{o ile} \quad |\arg s| < \pi.$$

Skorzystamy również z faktu, że

$$|(-t)|^s \leqslant |t|^{\mathrm{Re}\, s} e^{-\theta \mathrm{Im}\, s}, \quad \text{gdzie} \quad \arg(-t) = \theta, \ \ |\theta| < \pi$$

oraz z wynikającego z własności funkcji gamma oszacowania

$$|\Gamma(s)\Gamma(-s)| \leqslant \left|\frac{-\pi}{s\sin\pi s}\right| \leqslant \left|\frac{2\pi}{s}\right| e^{-\pi|\mathrm{Im}\, s|}.$$

Ostatecznie dostajemy oszacowanie

$$|s^2 g(s)(-t)^s| \quad \leqslant \quad M|s^{2+a+b-c}\Gamma(s)\Gamma(-s)| \cdot |(-t)^s| \leqslant \tilde{M}|t|^{\mathrm{Re}\, s}|s|^{1+a+b-c}e^{(|\theta|-\pi)|\mathrm{Im}\, s|}, \tag{4.8}$$

z którego wynika, że

$$|s^2 g(s)(-t)^s| \to 0 \quad \text{dla} \quad |\mathrm{Im}\, s| \to \infty,$$

co oznacza, że warunek (4.6) jest spełniony.

Zatem możemy zapisać, że

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\tilde{c}-i\infty}^{\tilde{c}+i\infty} \frac{\Gamma(s+a)\Gamma(s+b)}{\Gamma(s+c)}\Gamma(-s)(-t)^s\, ds.$$

Zauważmy, że funkcja podcałkowa ma bieguny jednokrotne dla s równych $-a$, $-a-1$, ..., $-b$, $-b-1$, ..., 0, 1, ... Załóżmy, że $\mathrm{Re}\,(-a)$, $\mathrm{Re}\,(-b) < \tilde{c} - 1 < \tilde{c} < 0$ (jeśli tak się nie da zrobić, to można lokalnie zdeformować kontur całkowania — tak, aby $-a+1$ i $-b+1$ znajdowały się na lewo od niego, zaś 0 na prawo). $\square$

Stwierdzenie 4.4 *Przy powyższych założeniach na $\tilde{c}$ (lub ogólniej na kontur całkowania) zachodzi wzór*

$${}_2F_1(a,b;c;t) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int\limits_{\tilde{c}-i\infty}^{\tilde{c}+i\infty} \frac{\Gamma(s+a)\Gamma(s+b)}{\Gamma(s+c)}\Gamma(-s)(-t)^s\, ds \quad \textit{dla} \quad |t| < 1, \tag{4.9}$$

dzięki któremu dostajemy przedłużenie analityczne funkcji hipergeometrycznej ${}_2F_1$ na zbiór $\overline{\mathbb{C}} \setminus [1,\infty]$.

Dowód. Niech $\gamma_{T,N}$ oznacza skierowany zgodnie z ruchem zegara kontur będący brzegiem prostokąta o wierzchołkach w punktach $-\tilde{c} \pm Ti$ oraz $N + \frac{1}{2} \pm Ti$. Zauważmy, że dla $|t| < 1$ na mocy oszacowania (4.8) dostajemy, że

$$|s^2 g(s)(-t)^s| \to 0 \quad \text{dla} \quad \mathrm{Re}\, s \to \infty.$$

Korzystając z tego faktu i z (4.6) dostajemy, że

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{T,N}} \frac{\Gamma(s+a)\Gamma(s+b)}{\Gamma(s+c)}\Gamma(-s)(-t)^s\, ds = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\tilde{c}-i\infty}^{\tilde{c}+i\infty} \frac{\Gamma(s+a)\Gamma(s+b)}{\Gamma(s+c)}\Gamma(-s)(-t)^s\, ds. \tag{4.10}$$

Z drugiej strony, z twierdzenia o residuach dostajemy, że

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{T,N}}\frac{\Gamma(s+a)\Gamma(s+b)}{\Gamma(s+c)}\Gamma(-s)(-t)^s\,ds=\sum_{n=0}^{N}\mathrm{Res}_{s=n}\Big(\frac{\Gamma(s+a)\Gamma(s+b)}{\Gamma(s+c)}\Gamma(-s)(-t)^s\Big)=$$

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{\Gamma(n+a)\Gamma(n+b)}{\Gamma(n+c)}(-t)^n\mathrm{Res}_{s=n}\Gamma(-s)=\sum_{n=0}^{N}\frac{\Gamma(n+a)\Gamma(n+b)}{\Gamma(n+c)}(-t)^n\cdot\frac{(-1)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{N}\frac{\Gamma(n+a)\Gamma(n+b)}{\Gamma(n+c)n!}t^n.$$

Zatem z (4.10)

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int\limits_{\tilde{c}-i\infty}^{\tilde{c}+i\infty}\frac{\Gamma(s+a)\Gamma(s+b)}{\Gamma(s+c)}\Gamma(-s)(-t)^s\,ds=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\cdot\frac{\Gamma(n+a)\Gamma(n+b)}{\Gamma(n+c)n!}t^n={}_2F_1(a,b;c;t),$$

co kończy dowód. □

Podobnie, całkując w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara wzdłuż brzegu prostokąta o wierzchołkach w punktach $-\tilde{c}\pm Ti$ oraz $-N-\frac{1}{2}\pm Ti$ dostajemy

Stwierdzenie 4.5 *Dla* $|t|>1$ *zachodzi wzór*

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)}{}_2F_1(a,b;c;t)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a-c)}(-t)^{-a}{}_2F_1(a,a-c+1;a-b+1;t^{-1})+\frac{\Gamma(b)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b-c)}(-t)^{-b}{}_2F_1(b,b-c+1;b-a+1;t^{-1}).$$

Zauważmy, że Stwierdzenie 4.5 pokazuje nam jaki jest związek pomiędzy rozwiązaniami równania hipegeometrycznego wokół zera $x_1(t)$ i wokół nieskończoności: $z_1(t)$ i $z_2(t)$.

Literatura

[1] D. V. Anosov, A. A. Bolibruch, *The Riemann–Hilbert Problem*, Vieweg, Wiesbaden 1994.

[2] W Balser, *Formal Power Series and Linear Systems of Meromorphic Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, New York 2000.

[3] E. Hille, *Ordinary differential equations in the complex domain*, John Wiley & Sons, New York 1976.

[4] M. Holmes, *Introduction to Perturbation Methods*, Springer-Verlag, New York 1995.

[5] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Yoshida, *From Gaus to Painlevé. A Modern Theory of Special Functions*, Vieweg, Braunschweig 1991.

[6] R. O'Malley, *Singular perturbation methods for ordinary differential equations*, Springer-Verlag, New York 1991.

[7] A. Palczewski, *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT, Warszawa 1999.

[8] W. Wasow, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, John Wiley & Sons, New York 1965.

[9] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *Kurs analizy współczesnej*. Część I, PWN, Warszawa 1967.

[10] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *Kurs analizy współczesnej*. Część II, PWN, Warszawa 1968.

[11] B. Ziemian, *20 lectures on ordinary and differential equations. Geometric methods of complex analysis*, preprint, IM PAN, Warszawa 1992.