10 Rozwinięcia asymptotyczne i sumowalność w sensie Borela

Główne twierdzenie o istnieniu dla rozwinięć asymptotycznych pochodzi z monografii W. Wasowa [8]. Część dotycząca sumowalności w sensie Borela pochodzi z książki W. Balsera [2].

10.1 Główne twierdzenie o istnieniu dla rozwinięć asymptotycznych

Zaczniemy od rozszerzenia pojęcia punktów osobliwych równania na układy liniowe postaci

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{10.1}$$

gdzie $x = (x_1, \ldots, x_m)$ jest wektorem, zaś $A(t)$ macierzą o meromorficznych współczynnikach.

Definicja 10.1 Punkt $t = t_0$ nazywamy *punktem osobliwym* równania (10.1) jeśli któryś ze współczynników macierzy $A(t)$ ma biegun w t_0.

Punkt osobliwy $t = t_0$ nazywamy *punktem osobliwym regularnym* równania (10.1) jeśli współczynniki macierzy $(t-t_0)A(t)$ są już analityczna w t_0.

Punkt osobliwy $t = t_0$ nazywamy *punktem osobliwym nieregularnym* równania (10.1) jeśli któryś ze współczynników macierzy $(t-t_0)A(t)$ ma biegun w t_0.

Punkt osobliwy $t = t_0$ nazywamy *punktem osobliwym rangi* r ($r \in \mathbb{N}_0$) równania (10.1) jeśli współczynniki macierzy $(t-t_0)^r A(t)$ nie są analityczna w t_0, zaś współczynniki macierzy $(t-t_0)^{r+1}A(t)$ są już analityczne w t_0.

Zauważmy, że punkty osobliwe rangi 0 są punktami osobliwymi regularnymi, zaś punkty osobliwe rangi większej od zera są punktami osobliwymi nieregularnymi.

Możemy również zdefiniować rangę punktu osobliwego dla równania n-tego rzędu postaci

$$x^{(m)} + a_{m-1}(t)x^{(m-1)} + \ldots + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = 0. \tag{10.2}$$

Definicja 10.2 Punkt osobliwy $t = t_0$ nazywamy *punktem osobliwym rangi* r jeśli $r \in \mathbb{N}_0$ jest najmniejszą liczbą dla której $(t-t_0)^{(r+1)m}a_0(t)$, ..., $(t-t_0)^{r+1}a_{m-1}(t)$ są analityczne w otoczeniu t_0.

Możemy teraz sformułować główne twierdzenie o istnieniu dla rozwinięć asymptotycznych.

Twierdzenie 10.3 *Niech $r \in \mathbb{N}_0$, $S \subset \mathbb{C}$ sektor o rozwartości co najwyżej $\frac{\pi}{r+1}$. Załóżmy, że $t_0 = 0$ jest punktem osobliwym rangi r układu m równań (10.1) (tzn. $t^{r+1}A(t)$ jest analityczne w otoczeniu zera) i macierz $t^{r+1}A(t)\Big|_{t=0}$ ma różne od zera wartości własne λ_1, ..., λ_m. Wówczas jeśli $\widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ jest rozwiązaniem formalnym (10.1), to istnieje $x(t) \in \mathcal{O}(S \cap \{|t| < \epsilon\})$ (dla pewnego $\epsilon > 0$) będące prawdziwym rozwiązaniem (10.1) i takie, że $x(t) \sim \widehat{x}(t)$ dla $t \in S^*$, $t \to 0$, gdzie S^* — dowolny podsektor S.*

Idea dowodu. (Cały dowód można znaleźć w monografii W. Wasowa [8].) Niech $\widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ będzie rozwiązaniem formalnym układu (10.1). Z twierdzenia Ritta (Twierdzenie 9.10) istnieje $\phi(t) \in \mathcal{O}(S \cap \{|t| < \epsilon_1\})$ takie, że $\phi(t) \sim \widehat{x}(t)$ dla $t \in S$, $t \to 0$. Korzystając ze stwierdzeń liniowości, mnożeniu i różniczkowaniu rozwinięć asymptotycznych (Stwierdzenia 9.3, 9.4 i 9.8) dostajemy

$$\dot{\phi}(t) - A(t)\phi(t) \sim \dot{\widehat{x}}(t) - A(t)\widehat{x}(t) = 0 \quad \text{dla} \quad t \in S^*,\ t \to 0.$$

Zatem wprowadzając oznaczenie $b(t) = \dot{\phi}(t) - A(t)\phi(t)$ dostajemy $b(t) \sim 0$ dla $t \in S^*$, $t \to 0$.

Niech dalej $x(t) \in \mathcal{O}(S \cap \{|t| < \epsilon_2\}$ będzie prawdziwym rozwiązaniem (10.1) i niech $u(t) = x(t) - \phi(t)$. Wówczas

$$\dot{u}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\phi}(t) = A(t)x(t) - A(t)\phi(t) - b(t) = A(t)\Big(x(t) - \phi(t)\Big) - b(t) = A(t)u(t) - b(t). \tag{10.3}$$

Należy jeszcze pokazać, że dla pewnego rzeczywistego rozwiązania $x(t)$ istnieje $u(t)$ będące rozwiązaniem (10.3) i spełniające warunek $u(t) \sim 0$ dla $t \in S^*$, $t \to 0$ (dowód w [8]). Wówczas $x(t) \sim \phi(t)$, a ponieważ również $\phi(t) \sim \widehat{x}(t)$, to $x(t) \sim \widehat{x}(t)$ dla $t \in S^*$ i $t \to 0$. □

10.2 Procedura sumowalności w sensie Borela

Zostanie teraz przedstawiona procedura dzięki której z rozbieżnego szeregu otrzymamy funkcję analityczną w pewnym sektorze. Dzięki temu dla danego rozwiązania formalnego $\widehat{x}(t)$ w punkcie osobliwym nieregularnym będziemy mogli znaleźć rozwiązanie prawdziwe $x(t)$ spełniające $x(t) \sim \widehat{x}(t)$ dla $t \in S$, $t \to 0$).

W tym celu uzbieżniamy szereg formalny $\widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ stosując *formalną transformację Borela*

$$\widehat{\mathcal{B}}_1 \widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n.$$

Transformacja Laplace'a

$$\mathcal{L}_1 g(t) = \frac{1}{t} \int_0^{\infty} g(s) e^{-\frac{s}{t}}\, ds$$

jest operacją odwrotną, gdyż podstawiając $\frac{s}{t} = \xi$ dostajemy

$$\mathcal{L}_1\Big(\frac{a_n}{n!} t^n\Big) = \frac{1}{t} \int_0^{\infty} \frac{a_n}{n!} s^n e^{-\frac{s}{t}}\, ds = \int_0^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n \xi^n e^{-\xi}\, d\xi = \frac{a_n}{n!} t^n \int_0^{\infty} \xi^n e^{-\xi}\, d\xi = \frac{a_n}{n!} t^n \Gamma(n+1) = a_n t^n.$$

Zatem wychodząc z szeregu formalnego $\widehat{x}(t)$ dochodzimy do funkcji analitycznej w sektorze $x(t) = \mathcal{L}_1 \widehat{\mathcal{B}}_1 \widehat{x}(t)$. Aby to miało sens musi być spełnionych kilka warunków:

1. Szereg $\widehat{\mathcal{B}}_1 \widehat{x}(t)$ jest zbieżny (tzn. istnieją $A, B < \infty$ takie, że $|a_n| \leqslant AB^n n!$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$).
2. $\widehat{\mathcal{B}}_1 \widehat{x}(t)$ przedłuża się do funkcji analitycznej w sektorze $S(0, \alpha)$, czy ogólniej $S(d, \alpha) = \{z \in \mathbb{C}\colon \arg z \in (d - \frac{\alpha}{2}, d + \frac{\alpha}{2})\}$ i wzrostu eksponencjalnego rzędu 1 w ∞ (tzn. $|\widehat{\mathcal{B}}_1 \widehat{x}(t)| \leqslant Ce^{at}$ dla pewnych $C, a < \infty$).

Zauważmy, że $\mathcal{L}_1 \widehat{\mathcal{B}}_1 \widehat{x}(t)$ jest funkcją analityczną w sektorze wokół zera dla $\operatorname{Re} t > 0$. Ponadto zamiast $\frac{1}{t}\int_0^{\infty} g(s) e^{-\frac{s}{t}}\, ds$ można wziąć $\frac{1}{t}\int_0^{\infty e^{i\phi}} g(s) e^{-\frac{s}{t}}\, ds$ dla dowolnego $|\phi - d| < \frac{\alpha}{2}$. Dla każdego ϕ operator Laplace'a jest analityczny w sektorze $S(\phi, \pi)$. Zatem biorąc różne ϕ przedłużamy analitycznie tę funkcję do $S(d, \pi + \alpha)$.

10.3 Szeregi i rozwinięcia asymptotyczne Gevreya

Zdefiniujemy pewne „pośrednie" szeregi pomiędzy zbieżnymi a dowolnymi formalnymi.

Definicja 10.4 Szereg formalny $\widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ nazywamy *szeregiem Gevreya rzędu s* jeśli istnieją stałe $A, B < \infty$ takie, że

$$|a_n| \leqslant AB^n (n!)^s \quad \text{dla każdego} \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

co będziemy oznaczać poprzez $\widehat{x} \in \mathbb{C}[[t]]_s$.

Zauważmy, że szereg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy $s \leqslant 0$. Dla $s = 0$ promień zbieżności jest skończony i szacuje się przez $R \leqslant \frac{1}{B}$. Natomiast dla $s < 0$ promień jest nieskończony (szereg przedłuża się do funkcji całkowitej).

Dla tak zdefiniowanych szeregów wprowadźmy odpowiednią asymptotykę.

Definicja 10.5 Mówimy, że funkcja $x(t)$ zdefiniowana w sektorze $S \subset \mathbb{C}$ posiada *rozwinięcie asymptotyczne Gevreya rzędu s*, $\widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \in \mathbb{C}[[t]]_s$ jeśli w każdym podsektorze S^* sektora S istnieją stałe $A, B < \infty$ takie, że

$$\Big| x(t) - \sum_{n=0}^{N} a_n t^n \Big| \leqslant AB^N (N!)^s |t|^{N+1} \quad \text{dla każdego} \quad N \in \mathbb{N}_0,\ t \in S^*,$$

co będziemy oznaczać poprzez $x(t) \sim_s \widehat{x}(t)$.

Zauważmy, że jeśli $x(t) \sim_s \widehat{x}(t)$ to również $x(t) \sim \widehat{x}(t)$. Podobnie jeśli $s_1 < s_2$ oraz $x(t) \sim_{s_1} \widehat{x}(t)$ to również $x(t) \sim_{s_2} \widehat{x}(t)$. Dla asymptotyki Gevreya zachodzą podobne stwierdzenia jak i dla asymptotyki Poincaré (własności algebraiczne rozwinięć asymptotycznych, całkowanie i różniczkowanie). Zachodzą również następujące fakty

Stwierdzenie 10.6 (Ritta dla asymptotyki Gevreya) *Dla $s > 0$ niech $\widehat{x} \in \mathbb{C}[[t]]_s$ i S — sektor o rozwartości równej co najwyżej $s\pi$. Wówczas istnieje $x(t) \in \mathcal{O}(S)$ takie, że $x(t) \sim_s \widehat{x}(t)$ w S.*

Stwierdzenie 10.7 (Lemat Watsona) *Niech S — sektor o rozwartości większej od $s\pi$, $s > 0$ i niech $x(t) \in \mathcal{O}(S)$ spełnia $x(t) \sim_s 0$ w S. Wówczas $x(t) \equiv 0$ w S.*

Uwaga 10.8 *Niech odwzorowanie $J\colon \mathcal{O}(S) \to \mathbb{C}[[t]]_s$ będzie dane wzorem $J(x(t)) = \widehat{x}(t)$ wtedy i tylko wtedy gdy $x(t) \sim_s \widehat{x}(t)$ w S. Wówczas jeśli rozwartość S jest:*
$\leqslant s\pi$ to J jest odwzorowaniem „na”;
$> s\pi$ to J jest odwzorowaniem różnowartościowym.

10.4 Sumowalność w sensie Borela

Definicja 10.9 *Operatorem Laplace'a rzędu k w kierunku d* nazywamy operator

$$\mathcal{L}_{k,d}x(t) = t^{-k} \int_0^{e^{id}\infty} x(s)e^{-(\frac{s}{t})^k}\, ds^k.$$

Zauważmy, że jeśli $x(t) \in \mathcal{O}^k\Big(S(d,\alpha)\Big)$ (analityczne na $S(d,\alpha)$ i eksponencjalne rzędu co najwyżej k przy $t \to \infty$) to $\mathcal{L}_{k,d}x(t) \in \mathcal{O}\Big(S(d, \alpha + \frac{\pi}{k})\Big)$.

Definicja 10.10 Jeśli $\widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, to *formalnym operatorem Borela rzędu k* nazywamy operator

$$\widehat{\mathcal{B}}_k \widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\Gamma(1+\frac{n}{k})} t^n.$$

Zauważmy, że jeśli $\widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ jest rzędu Gevreya s, to $\widehat{\mathcal{B}}_{\frac{1}{s}}\widehat{x}(t)$ analityczne w otoczeniu zera.

Definicja 10.11 Mówimy, że szereg $\widehat{x}(t)$ jest 1-*sumowalny w kierunku d* jeśli zachodzą równoważne warunki:

1. Można do niego zastosować metodę sumowania Borela-Laplace w kierunkach z otoczenia kierunku d: $x(t) = \mathcal{L}_{1,d}\Big(\widehat{\mathcal{B}}_1\widehat{x}\Big)(t)$.
2. $\widehat{x} \in \mathbb{C}[[t]]_1$ oraz $\widehat{\mathcal{B}}_1\widehat{x} \in \mathcal{O}^1\Big(S(d,\alpha)\Big)$ dla pewnego $\alpha > 0$.
3. $\widehat{x} \in \mathbb{C}[[t]]_1$ oraz istnieje $x \in \mathcal{O}\Big(S(d,\alpha+\pi)\Big)$ dla pewnego $\alpha > 0$, takie że $x \sim_1 \widehat{x}$ w $S(d,\alpha+\pi)$.

Zauważmy, że z lematu Watsona (Stwierdzenie 10.7) wynika jednoznaczność x takiego że $x \sim_1 \widehat{x}$ w $S(d,\alpha+\pi)$.

Definicja 10.12 Szereg formalny $\widehat{x}$ jest 1-*sumowalny* jeśli jest on 1-sumowalny w każdym kierunku z wyjątkiem skończonej liczby kierunków osobliwych.

Podobnie zdefiniujemy k-sumowalność.

Definicja 10.13 Mówimy, że szereg $\widehat{x}(t)$ jest *k-sumowalny w kierunku d* jeśli zachodzą równoważne warunki:

1. Można do niego zastosować metodę sumowania Borela-Laplace w kierunkach z otoczenia kierunku d: $x(t) = \mathcal{L}_{k,d}\Big(\widehat{\mathcal{B}}_k\widehat{x}\Big)(t)$.
2. $\widehat{x} \in \mathbb{C}[[t]]_{\frac{1}{k}}$ oraz $\widehat{\mathcal{B}}_k\widehat{x} \in \mathcal{O}^k\Big(S(d,\alpha)\Big)$ dla pewnego $\alpha > 0$.
3. $\widehat{x} \in \mathbb{C}[[t]]_{\frac{1}{k}}$ oraz istnieje $x \in \mathcal{O}\Big(S(d,\alpha+\frac{\pi}{k})\Big)$ dla pewnego $\alpha > 0$, takie że $x \sim_{\frac{1}{k}} \widehat{x}$ w $S(d,\alpha+\frac{\pi}{k})$.

Definicja 10.14 Szereg formalny $\widehat{x}$ jest *k-sumowalny* jeśli jest on k-sumowalny w każdym kierunku z wyjątkiem skończonej liczby kierunków osobliwych.

Zauważmy, że przy ustalonym kierunku d szereg 1-sumowalny spełnia słabszy warunek ale na sektorze o rozwartości większej niż π, natomiast szereg 2-sumowalny wymaga spełnienia silniejszego warunku ale za to tylko na sektorze o rozwartości większej niż $\frac{\pi}{2}$.

Okazuje się jednak, że czasami sama k-sumowalność nie wystarcza i dlatego wprowadzimy jeszcze pojęcie multisumowalności.

Definicja 10.15 Szereg $\widehat{x}(t)$ jest $(k_1, ..., k_n)$-*multisumowalny* jeśli $\widehat{x}(t) = \widehat{x}_1(t) + ... + \widehat{x}_n(t)$ oraz $\widehat{x}_i(t)$ jest k_i-sumowalny $(i = 1, ..., n)$.

Zachodzi

Twierdzenie 10.16 (Braaksma, 1992) *Każde rozwiązanie formalne równania zwyczajnego o meromorficznych współczynnikach jest multisumowalne.*

Dla równania (10.2) jeśli rozwiązanie formalne $\widehat{x}(t)$ jest k-sumowalne i $x(t) = \mathcal{L}_{k,d}\Big(\widehat{\mathcal{B}}_k\widehat{x}\Big)(t)$ to $x \sim_{\frac{1}{k}} \widehat{x}$ na $S(d, \alpha + \frac{\pi}{k})$ $(\alpha > 0)$. Z lematu Watsona (Stwierdzenie 10.7) jest to jedyna funkcja spełniająca tę asymptotykę. Z drugiej strony powtarzając dowód głównego twierdzenia o istnieniu dla rozwinięć asymptotycznych (Twierdzenie 10.3) mamy, że jeśli $y(t)$ jest rozwiązaniem to również $y \sim_{\frac{1}{k}} \widehat{x}$ na $S(d, \alpha + \frac{\pi}{k})$. Zatem z jednoznaczności $y = x$, czyli otrzymane w wyniku procedury sumowalności $x(t)$ jest prawdziwym rozwiązaniem równania (10.2).

Ćwiczenia

1. Znajdź punkty osobliwe danego równania. Określ ich rangę.
   a) $t^4(1-t)^3\ddot{x} + t^2(t+1)\dot{x} + (1-t)x = 0$,
   b) $t^3(t^2-4)\ddot{x} + t^4\dot{x} + tx = 0$.

2. Sprawdź jakiego rzędu Gevreya s jest dany szereg formalny. Uwaga: w tym ćwiczeniu może być pomocny wzór Stirlinga: $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ dla dużych n.
   a) $\widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n^n t^n$,
   b) $\widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n^n t^{2n}$,
   c) $\widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n^{2n} t^n$,
   d) $\widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (3n)! t^{2n}$.

3. Przeprowadź procedurę 1-sumowalności dla danego szeregu formalnego.
   a) $\widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)! t^n$,
   b) $\widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n)! t^{2n+1}$.

Literatura

[1] D. V. Anosov, A. A. Bolibruch, *The Riemann–Hilbert Problem*, Vieweg, Wiesbaden 1994.

[2] W Balser, *Formal Power Series and Linear Systems of Meromorphic Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, New York 2000.

[3] E. Hille, *Ordinary differential equations in the complex domain*, John Wiley & Sons, New York 1976.

[4] M. Holmes, *Introduction to Perturbation Methods*, Springer-Verlag, New York 1995.

[5] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Yoshida, *From Gaus to Painlevé. A Modern Theory of Special Functions*, Vieweg, Braunschweig 1991.

[6] R. O'Malley, *Singular perturbation methods for ordinary differential equations*, Springer-Verlag, New York 1991.

[7] A. Palczewski, *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT, Warszawa 1999.

[8] W. Wasow, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, John Wiley & Sons, New York 1965.

[9] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *Kurs analizy współczesnej*. Część I, PWN, Warszawa 1967.

[10] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *Kurs analizy współczesnej*. Część II, PWN, Warszawa 1968.

[11] B. Ziemian, *20 lectures on ordinary and differential equations. Geometric methods of complex analysis*, preprint, IM PAN, Warszawa 1992.