11 Przykłady sumowalności w sensie Borela. Diagram Newtona i zjawisko Stokesa

11.1 Diagram Newtona

Rozważmy równanie

(11.1) $P(t, \frac{d}{dt}) = b_m(t)x^{(m)} + ... + b_1(t)\dot{x} + b_0(t)x = 0, \quad$ gdzie $\quad b_i(t) = \sum_{j=0}^{m} b_{i,j}t^j$ jest analityczne w otoczeniu zera.

Definicja 11.1 Dla danego równania (11.1) możemy zdefiniować zbiór $\mathcal{N}_P = \{(i, j-i) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z} \colon b_{i,j} \neq 0\}$ zwany *diagramem Newtona*. Podobnie *wielokątem Newtona* nazywamy zbiór $\operatorname{conv}(\mathcal{N}_P + \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+)$ (tzn. uwypuklenie zbioru $\mathcal{N}_P + \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$).

Zobaczmy jak wygląda wielokąt Newtona w zależności od tego, jakiego rodzaju punktem jest $t_0 = 0$.

Niech $t_0 = 0$ będzie punktem nieosobliwym równania (11.1). Wówczas w równaniu tym możemy przyjąć $b_m(t) \equiv 1$, czyli $b_{m,0} = 1$ i wielokąt Newtona jest równy $(m, -m) + \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$.

Niech $t_0 = 0$ będzie punktem osobliwym regularnym równania (11.1). Oznacza to, że współczynniki tego równania można zapisać w postaci: $b_m(t) = t^m$ (czyli $b_{m,m} = 1$) oraz $b_i(t) = t^i a_i(t)$, gdzie $a_i(t)$ analityczne w otoczeniu zera (czyli $b_{i,j} = 0$ dla $j \leqslant i$) zaś $i = 0, ..., m-1$. Wobec tego wielokąt Newtona jest równy $(m, 0) + \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$.

Niech $t_0 = 0$ będzie punktem osobliwym nieregularnym rangi r ($r \geqslant 1$) równania (11.1). Wówczas współczynniki tego równania można zapisać w postaci: $b_m(t) = t^{(r+1)m}$ czyli $b_{m,(r+1)m} = 1$) oraz $b_i(t) = t^{(r+1)i}a_i(t)$, gdzie $a_i(t)$ analityczne w otoczeniu zera (czyli $b_{i,j} = 0$ dla $j \leqslant (r+1)i$) zaś $i = 0, ..., m-1$. Wobec tego wielokąt Newtona jest ograniczony bokami $(-\infty, 0) - (0, 0) - (m, rm) - (m, +\infty)$. Zatem w szczególności jeśli $t_0 = 0$ jest punktem osobliwym nieregularnym to istnieje odcinek o nachyleniu dodatnim do osi poziomej.

Zauważmy, że dopiero w tym ostatnim przypadku znalazł się bok różny od poziomego i pionowego. Współczynnik nachylenia tego boku (tzn tangens nachylenia boku do poziomu) wynosi $\kappa = r$, gdzie κ będziemy nazywać niezmiennikiem Katza. Mówiąc precyzyjniej mamy

Definicja 11.2 *Niezmiennikiem Katza* κ dla danego wielokąta Newtona (a więc i dla danego równania) nazywamy najmniejszy niezerowy współczynnik nachylenia boków do poziomu.

Zauważmy też, że rząd Gevreya rozwiązania formalnego dla danego równania jest równy $\frac{1}{\kappa}$, gdzie κ jest niezmiennikiem Katza dla danego równania.

Z wielokąta Newtona możemy też wnioskować o liczbie rozwiązań formalnych (danych w postaci szeregu Frobeniusa) — jest ona równa długości odcinka poziomego wychodzącego z punktu $(0, 0)$. Również wielokąt Newtona dostarcza informacji o sumowalności. Mówiąc precyzyjniej, aby dany szereg był k-sumowalny, musi istnieć odcinek o nachyleniu równym k.

11.2 1-sumowalność

Rozważmy następujące równanie Eulera

(11.2) $$t^2\dot{x} + x = t.$$

Jego rozwiązanie formalne ma postać $\widehat{x}_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n! t^{n+1}$. Natomiast prawdziwe rozwiązanie ogólne równania (11.2) jest równe $x(t) = ce^{1/t} + \int_0^t \frac{e^{1/t}e^{-1/s}}{s}\,ds$. Biorąc rozwiązanie szczególne ($c = 0$) i dokonując zamiany zmiennych $\frac{1}{s} - \frac{1}{t} = \frac{\xi}{t}$ dostajemy

(11.3) $$x_1(t) = \int_0^t \frac{e^{1/t}e^{-1/s}}{s}\,ds = \int_0^\infty \frac{1}{\xi+1}e^{-\xi/t}\,d\xi \quad \text{dla} \quad t > 0.$$

Znajdziemy teraz związek pomiędzy rozwiązaniem formalnym $\widehat{x}_1(t)$ a rozwiązaniem prawdziwym $x_1(t)$. W tym celu zauważmy, że

$$\frac{1}{1+\xi} = \sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n\xi^n + \frac{(-1)^N\xi^N}{1+\xi} \quad \text{oraz} \quad \int_0^\infty \xi^n e^{-\xi/t}\,d\xi = n!t^{n+1},$$

więc dla t należących do dowolnego podsektora S^* zawartego w $S(0,\pi) = \{t \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} t > 0\}$ zachodzi

$$\Big|x_1(t) - \sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n n! t^{n+1}\Big| = \Big|\int_0^\infty \frac{\xi^N e^{-\xi/t}}{1+\xi}\, d\xi\Big| \leqslant \int_0^\infty \xi^N e^{-\xi \operatorname{Re}(1/t)}\, d\xi \leqslant N!\Big(\frac{1}{\operatorname{Re}(1/t)}\Big)^{N+1} \leqslant CB^N N! |t|^{N+1}.$$

Oznacza to, że $x_1(t) \sim_1 \widehat{x}_1(t)$.

Wróćmy do naszego równania (11.2). Ponieważ diagram Newtona jest zdefiniowany dla równań liniowych jednorodnych, to spróbujemy przekształcić nasze równanie w ten sposób, by otrzymać równanie jednorodne o takim samym rozwiązaniu formalnym co równanie wyjściowe. W tym celu obie strony (11.2) podzielmy przez t a następnie zróżniczkujmy (względem t). Otrzymamy wówczas równanie

$$t\ddot{x} + \dot{x} + \frac{1}{t}\dot{x} - \frac{1}{t^2}x = 0 \quad \text{czyli} \quad t^3\ddot{x} + (t^2+t)\dot{x} - x = 0.$$

Diagram Newtona dla tego równania zawiera punkty $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ i $(2,1)$, a wielokąt Newtona jest ograniczony bokami $(-\infty,0) - (1,0) - (2,1) - (2,\infty)$. Zatem współczynnik Katza jest równy nachyleniu boku $(1,0) - (2,1)$ do poziomu i wynosi $\kappa = 1$. Oznacza to, że rozwiązanie formalne jest rzędu Gevreya 1. (Oczywiście widać to również bezpośrednio z postaci $\widehat{x}_1(t)$.)

Spróbujemy teraz zastosować do $\widehat{x}_1(t) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n n! t^{n+1}$ metodę sumowalności Borela.

$$\widehat{\mathcal{B}}_1\widehat{x}_1(s) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n n! t^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n s^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \int_0^s t^n\, dt = \int_0^s \sum_{n=0}^\infty (-1)^n t^n\, dt = \int_0^s \frac{1}{1+t}\, dt = \ln(1+s).$$

Zauważmy, że transformata Borela przedłuża się na zbiór $\mathbb{C} \setminus (-\infty,-1]$ i jest wzrostu co najwyżej eksponencjalnego na dowolnym podsektorze S^* w $S(0,2\pi)$. Wobec tego możemy zastosować transformację Laplace'a i dla $\operatorname{Re} t > 0$ dostajemy

$$\mathcal{L}_1\widehat{\mathcal{B}}_1\widehat{x}_1(t) = \frac{1}{t}\int_0^\infty \ln(1+s)e^{-s/t}\, ds = -\ln(1+s)e^{-s/t}\Big|_{s=0}^{s=\infty} + \frac{1}{t}\int_0^\infty \frac{t}{1+s}e^{-s/t}\, ds = \int_0^\infty \frac{e^{-s/t}}{1+s}\, ds = x_1(t).$$

Półprostą $[0,\infty)$ po której całkujemy w (11.3) możemy zastąpić dowolną inną półprostą $e^{i\theta}\mathbb{R}_+$, gdzie $\theta \in (-\pi,\pi)$. Wówczas dostajemy funkcję

$$x_1^\theta(t) = \int_0^{e^{i\theta}\infty} \frac{e^{-s/t}}{1+s}\, ds,$$

która jest przedłużeniem analitycznym $x_1(t)$ na sektor $S(\theta,\pi)$. Zatem $x_1(t)$ możemy przedłużyć analitycznie na zbiór $S(0,3\pi) = \{t \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \colon \arg t \in (-\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)\}$.

11.3 Zjawisko Stokesa

Rozwiązanie formalne równania (11.1) w otoczeniu punktu osobliwego nieregularnego t_0 jest dane przez szereg rozbieżny. Oznacza to, że szereg ten nie może być rozwinięciem asymptotycznym jednej funkcji w całym swym otoczeniu (bo wtedy dałoby się tę funkcję przedłużyć na punkt t_0 i szereg byłby zbieżny). Innymi słowy rozwiązanie formalne równania (11.1) w otoczeniu punktu osobliwego nieregularnego ma w różnych sektorach różne asymptotyki — czyli jest ono rozwinięciem asymptotycznym różnych funkcji, w zależności od wybranego sektora. Fakt ten nosi nazwę *zjawiska Stokesa*, gdyż był po raz pierwszy zaobserwowany przez George'a Stokesa (1819–1903) w 1857 roku.

Wróćmy do prawdziwego rozwiązania $x_1(t)$ (danego przez (11.3)) równania (11.2), które jest analityczne dla $\arg t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Możemy w całce w (11.3) zmienić kontur całkowania na $e^{i\theta}\mathbb{R}_+$, gdzie $\theta \in (-\pi,\pi)$ i przedłużyć $x_1(t)$ aż do:

$$x_1^{\pi-\epsilon}(t) = \int_0^{e^{i(\pi-\epsilon)}\infty} \frac{e^{-t/\xi}}{1+\xi}\, d\xi \quad \text{dla} \quad \arg t \in (\frac{\pi}{2}-\epsilon, \frac{3\pi}{2}-\epsilon)$$

oraz

$$x_1^{-\pi+\epsilon}(t) = \int_0^{e^{i(-\pi+\epsilon)}\infty} \frac{e^{-t/\xi}}{1+\xi}\, d\xi \quad \text{dla} \quad \arg t \in (-\frac{3\pi}{2}+\epsilon, \frac{1\pi}{2}+\epsilon)$$

Przez linię $\arg t = \pi$ (czyli też $\arg t = -\pi$) nie da się przeprowadzić konturu całkowania, gdyż dla $\xi = -1$ jest biegun. Spróbujmy zatem zbadać na ile zmieni się funkcja jeśli weźmiemy kontury całkowania po obu stronach tej linii. Mamy dla $\arg t \in (\frac{\pi}{2} + \epsilon, \frac{3\pi}{2} - \epsilon)$

$$x_1^{\pi+\epsilon}(t) - x_1^{\pi-\epsilon}(t) = \int_0^{e^{i(\pi+\epsilon)}\infty} \frac{e^{-t/\xi}}{1+\xi}\, d\xi - \int_0^{e^{i(\pi-\epsilon)}\infty} \frac{e^{-t/\xi}}{1+\xi}\, d\xi = 2\pi i \mathrm{Res}_{\xi=1}\Big(\frac{e^{-\xi/t}}{1+\xi}\Big) = 2\pi i e^{1/t}.$$

Zauważmy, że dla takich t zachodzi $2\pi i e^{1/t} \sim 0$, więc też $x_1^{\pi+\epsilon}(t) \sim \widehat{x}_1(t)$ oraz $x_1^{\pi-\epsilon}(t) \sim \widehat{x}_1(t)$.

Aby móc dalej badać obie asymptotyki wprowadźmy następujące pojęcia

Definicja 11.3 Załóżmy, że $f(t) \sim \widehat{x}(t)$, $g(t) \sim \widehat{x}(t)$ oraz $f(t) = g(t) + r(t)$ dla $t \in S$, gdzie S — sektor. Mówimy, że zbiór $S_\varphi = \{t \in \mathbb{C}\colon\ \arg t = \varphi\}$ jest *linią Stokesa* jeśli dla $t \in S_\varphi$ funkcja $r(t)$ jest minimalna.

Mówimy, że zbiór $S_\psi = \{t \in \mathbb{C}\colon\ \arg t = \psi\}$ jest *linią Anty-Stokesa* jeśli dla $t \in S_\psi$ funkcja $r(t)$ majoryzuje $f(t)$ lub $g(t)$.

Zauważmy, że w naszym przypadku linią Stokesa jest S_π natomiast linią Anty-Stokesa jest $S_{\frac{\pi}{2}}$ i $S_{\frac{3\pi}{2}}$.

Więcej o zjawisku Stokesa można znaleźć w książkach W. Balsera [2], E. Hille'a [3] i W. Wasowa [8].

11.4 2-sumowalność

Rozważmy teraz równanie Eulera bis

$$\frac{t^3}{2}\dot{x} + x = t^2, \tag{11.4}$$

którego rozwiązanie formalne wynosi $\widehat{x}_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n! t^{2(n+1)} = \widehat{x}_1(t^2)$, zaś prawdziwe rozwiązanie ma postać

$$x_2(t) = \int_0^t \frac{2e^{1/t^2}e^{-1/s^2}}{s}\, ds = \int_0^\infty \frac{1}{\xi+1} e^{-\xi/t^2}\, d\xi \quad \text{dla} \quad \arg t \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}).$$

Mamy

$$\Big| x_2(t) - \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} (-1)^n n! t^{2n} \Big| \leqslant C_1 B_1^N \lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor ! |t|^{N+1} \leqslant C B^N \sqrt{N!} |t|^{N+1},$$

czyli $x_2(t) \sim_2 \widehat{x}_2(t)$.

Podobnie jak poprzednio wyliczymy diagram i wielokąt Newtona. W tym celu podzielmy obie strony równania (11.4) przez t^2 i zróżniczkujmy obie strony po t. Dostaniemy równanie jednorodne drugiego rzędu postaci

$$\frac{t}{2}\ddot{x} + \frac{1}{2}\dot{x} + \frac{1}{t^2}\dot{x} - \frac{2}{t^3}x = 0, \quad \text{czyli} \quad t^4\ddot{x} + (t^3 + 2t)\dot{x} - 4x = 0.$$

Diagram Newtona zawiera punkty: $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$ i $(2,2)$. Natomiast wielokąt Newtona składa się z boków: $(-\infty, 0) - (1,0) - (2,2) - (2,\infty)$. Można stąd wyczytać, że istnieje jedno rozwiązanie formalne (odcinek poziomy od $(0,0)$ długości 1), które jest rzędu Gevreya $\frac{1}{2}$ (współczynnik Katza $\kappa = 2$).

Dokonajmy teraz procedury 2-sumowalności Borela. Ponieważ $\widehat{x}_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n! t^{2(n+1)}$, to

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{B}}_2\widehat{x}_2(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n! s^{2(n+1)}}{\Gamma(1+\frac{2(n+1)}{2})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!} s^{2(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)} s^{2(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2 \int_0^s t^{2n+1}\, dt \\
&= \int_0^s \frac{2s}{1+s^2}\, ds = \ln(1+s^2).
\end{aligned}$$

Transformata Borela przedłuża się na $\mathbb{C} \setminus \Big([-i,\infty) \cup [i,\infty)\Big)$ i jest wzrostu co najwyżej eksponencjalnego na dowolnym podsektorze S^* sektora $S(0, \frac{\pi}{2})$. Wobec tego dla $\arg t \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ możemy zastosować transformację Laplace'a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2\widehat{\mathcal{B}}_2\widehat{x}_2(t) &= \frac{1}{t^2}\int_0^\infty \ln(1+s^2) e^{-s/t^2} 2s\, ds = -\ln(1+s^2) e^{-s^2/t^2}\Big|_{s=0}^{s=\infty} + \int_0^\infty \frac{2s}{1+s^2} e^{-s^2/t^2}\, ds = \int_0^\infty \frac{1}{1+\xi} e^{-\xi/t^2}\, d\xi \\
&= x_2(t).
\end{aligned}$$

Podobnie jak w przypadku $x_1(t)$, również $x_2(t)$ możemy przedłużyć biorąc odpowiedni kontur całkowania aż do

$$x_2^{\pi-\epsilon}(t) = \int_0^{e^{i(\pi-\epsilon)}\infty} \frac{1}{\xi+1} e^{-\xi/t^2}\, d\xi \quad \text{dla} \quad \arg t \in (\frac{1}{4}\pi - \epsilon, \frac{3}{4}\pi - \epsilon) \cup (\frac{5}{4}\pi - \epsilon, \frac{7}{4}\pi - \epsilon).$$

Porównując to z $x_2^{\pi+\epsilon}(t)$, dla $\arg t \in (\frac{1}{4}\pi + \epsilon, \frac{3}{4}\pi - \epsilon) \cup (\frac{5}{4}\pi + \epsilon, \frac{7}{4}\pi - \epsilon)$ dostajemy

$$x_2^{\pi+\epsilon}(t) - x_2^{\pi-\epsilon}(t) = 2\pi i \mathrm{Res}_{\xi=-1}\Big(\frac{e^{-\xi/t^2}}{1+\xi}\Big) = 2\pi i e^{1/t^2}.$$

Wobec tego dla powyższych t mamy $2\pi i e^{1/t^2} \sim 0$, $x_2^{\pi-\epsilon}(t) \sim x_2(t)$ oraz $x_2^{\pi+\epsilon}(t) \sim x_2(t)$. W tym przypadku liniami Stokesa są $S_{\frac{\pi}{2}}$ i $S_{\frac{3}{2}\pi}$, zaś liniami Anty-Stokesa są $S_{\frac{\pi}{4}}$ i $S_{\frac{3}{4}\pi}$, $S_{\frac{5}{4}\pi}$ i $S_{\frac{7}{4}\pi}$.

11.5 Porównanie 1- i 2-sumowalności. (2, 1)-multisumowalność

Przy ustalonym kierunku d 1-sumowalność oznacza słabszy warunek ($x_1 \sim_1 \widehat{x}_1$) na sektorze o rozwartości $> \pi$, natomiast 2-sumowalność wymaga spełnienia silniejszego warunku ($x_2 \sim_2 \widehat{x}_2$) lecz tylko na sektorze o rozwartości $> \frac{\pi}{2}$.

Oczywiście $\widehat{x}_1(t)$ nie jest 2-sumowalne (bo $\widehat{x}_1 \notin \mathbb{C}[[t]]_{\frac{1}{2}}$). Pokażemy, że również $\widehat{x}_2(t)$ nie jest 1-sumowalne. W tym celu weźmy t czysto urojone, tzn $t = is$, $s \in \mathbb{R}$. Wówczas

$$|\widehat{\mathcal{B}}_1\widehat{x}_2(is)| = |\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+2)!}(-1)^{n+1}s^{2n+2}| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n+2)!}(s^2)^{n+1} \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(\frac{s^2}{4})^{n+1} = e^{\frac{s^2}{4}} - 1,$$

czyli transformata Borela $\widehat{\mathcal{B}}_1\widehat{x}_2(is)$ ma wzrost eksponencjalny rzędu 2. Zatem nie możemy w nim stosować transformacji Laplace'a w sektorze zawierającym oś urojoną.

Na zakończenie podamy przykład równania, w którym musimy skorzystać z multisumowalności. Równanie

$$t^5(2-t)\ddot{x} + t^2(4+5t^2-2t^3)\dot{x} + 2(2-t+t^2)x = 4t + 2t^2 + 10t^3 - 3t^4 \tag{11.5}$$

posiada rozwiązanie formalne $\widehat{x}(t) = \widehat{x}_1(t) + \widehat{x}_2(t)$. Spełnia ono również równanie jednorodne wyższego rzędu

$$(8t^6 + \cdots + 3t^{10})\dddot{x} + (-16t^3 + \dots)\ddot{x} + (16t + \dots)x = 0,$$

więc jego diagram Newtona zawiera pary $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,1)$ i $(3,3)$ i wielokąt Newtona składa się z boków $(-\infty,0) - (1,0) - (2,1) - (3,3) - (3,\infty)$.

Bok o nachyleniu 0 oznacza, że istnieje rozwiązanie formalne $\widehat{x}(t)$. Natomiast boki o nachyleniach 1 i 2 oznaczają, że $\widehat{x}(t)$ jest Gevreya rzędu 1 oraz jest (2,1)-multisumowalne.

Ponieważ $\widehat{x}(t) = \widehat{x}_1(t) + \widehat{x}_2(t)$ oraz $\widehat{x}_2(t)$ nie jest 1-sumowalny, a $\widehat{x}_1(t)$ nie jest 2-sumowalny, więc $\widehat{x}(t)$ nie jest ani 1-, ani 2-sumowalny. Natomiast jest on (2,1)-multisumowalny.

Ćwiczenia

1. Znajdź diagram i wielokąt Newtona dla danych równań. Ile wynosi niezmiennik Katza? Jakiego rzędu Gevreya są rozwiązania formalne?
   a) $t^5\,\dddot{x} + t^5\ddot{x} + (t^4 + 2t)\dot{x} + 7x = 0$.
   b) $t^6(t-1)\,\dddot{x} + (t^7 + 5t^3)\ddot{x} + t\dot{x} + (17 + 4t^3)x = 0$.
   c) $(t^3 + t^2 + t)^6\ddot{x} + t^4\ddot{x} + (t^2 - t)\dot{x} + (43t^4 + 2t^2 + 5t + 6)x = 0$.
2. Opisz zjawisko Stokesa i znajdź linie Stokesa i Anty-Stokesa dla szeregów:
   a) $\widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)!t^n$,
   b) $\widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n)!t^{2n+1}$.

Literatura

[1] D. V. Anosov, A. A. Bolibruch, *The Riemann–Hilbert Problem*, Vieweg, Wiesbaden 1994.

[2] W Balser, *Formal Power Series and Linear Systems of Meromorphic Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, New York 2000.

[3] E. Hille, *Ordinary differential equations in the complex domain*, John Wiley & Sons, New York 1976.

[4] M. Holmes, *Introduction to Perturbation Methods*, Springer-Verlag, New York 1995.

[5] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Yoshida, *From Gaus to Painlevé. A Modern Theory of Special Functions*, Vieweg, Braunschweig 1991.

[6] R. O'Malley, *Singular perturbation methods for ordinary differential equations*, Springer-Verlag, New York 1991.

[7] A. Palczewski, *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT, Warszawa 1999.

[8] W. Wasow, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, John Wiley & Sons, New York 1965.

[9] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *Kurs analizy współczesnej*. Część I, PWN, Warszawa 1967.

[10] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *Kurs analizy współczesnej*. Część II, PWN, Warszawa 1968.

[11] B. Ziemian, *20 lectures on ordinary and differential equations. Geometric methods of complex analysis*, preprint, IM PAN, Warszawa 1992.